信頼性に基づく最適設計の単一ループアルゴリズムについて

小木曽 望
大阪府立大学大学院 工学研究科
航空宇宙海洋系専攻

日本機械学会計算力学部門
「複合領域における設計探査研究会」
2008年7月10日 名古屋大学VBL

内容

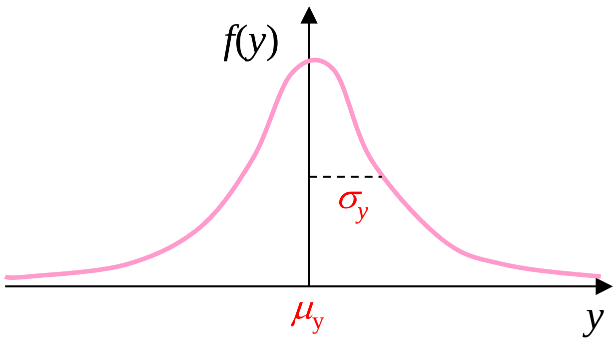
- 信頼性解析の基礎
  - 正規分布の性質
  - 一次信頼性法 (FORM)
- 信頼性に基づく最適設計
  - 二重ループによる定式化
- 単一ループ法 (計算効率改善)
- 数値例
  - トポロジー最適設計への適用
- まとめと課題

正規分布が広く使われる理由

$$N\left(\mu,\sigma^2\right) \qquad f\left(z\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{\left(z-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

- 中心極限定理
  - 独立な確率変数の和の分布は，元の変数の分布形にかかわらず，正規分布に漸近する．
- 線形関数の性質
  - 正規分布変数の線形関数は，正規分布

$$y=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_i z_i$$



$$\boxed{\begin{aligned}\mu_y &= a_0+\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_{z_i}\\ \sigma_y^2 &= \sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_{z_i}^2\end{aligned}}$$

信頼性解析

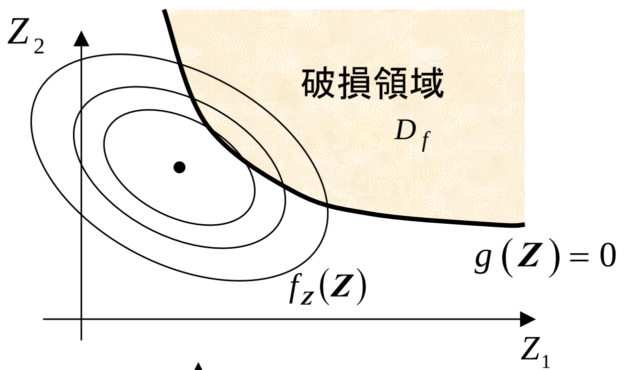
$$\boxed{M\left(\boldsymbol{Z}\right)\begin{cases}<0 & \text{破損}\\ =0 & \text{限界状態}\\ >0 & \text{安全}\end{cases}}$$

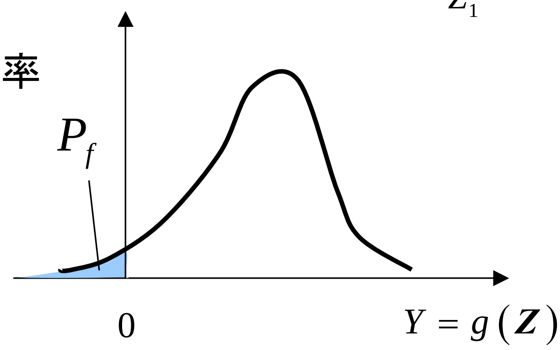
- 確率変数 $\boldsymbol{Z}$
  - 材料特性，荷重の変動
  - 確率論に基づいて，モデル化
    - 平均値，分散，分布形
- 限界状態関数　$Y=g\left(\boldsymbol{Z}\right)$
  - 確率的変動を有する
    - 平均値，分散，分布形
- 破損確率
  - 応答量が負の値($g(\boldsymbol{Z})<0$)をとる確率

$$P_f=P\left[g\left(\boldsymbol{z}\right)<0\right]$$

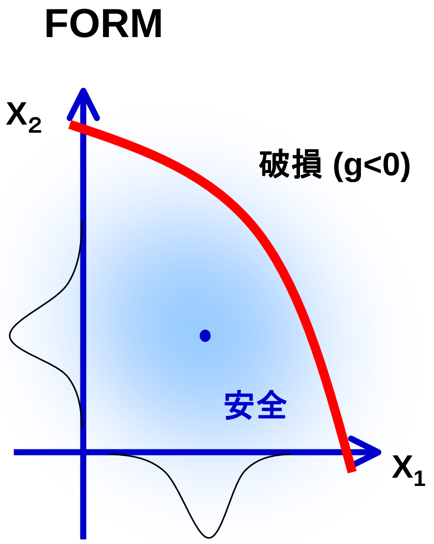
- 信頼性

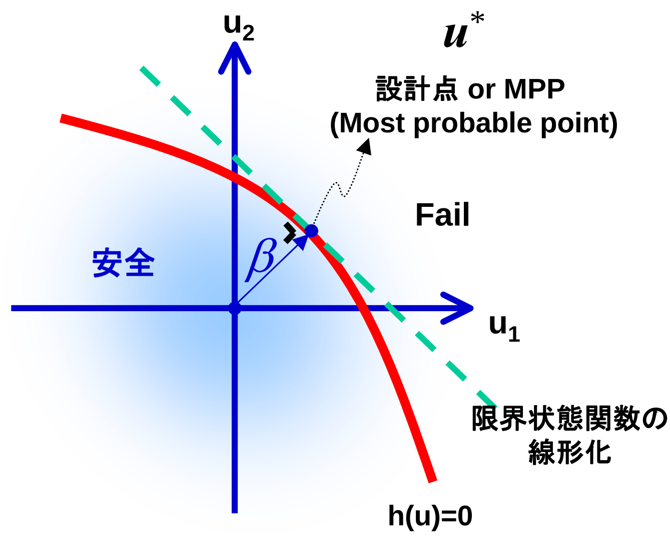
$$R=1-P_f$$





一次信頼性法(FORM)と信頼性指標 β





正規(非正規)確率分布

標準正規確率

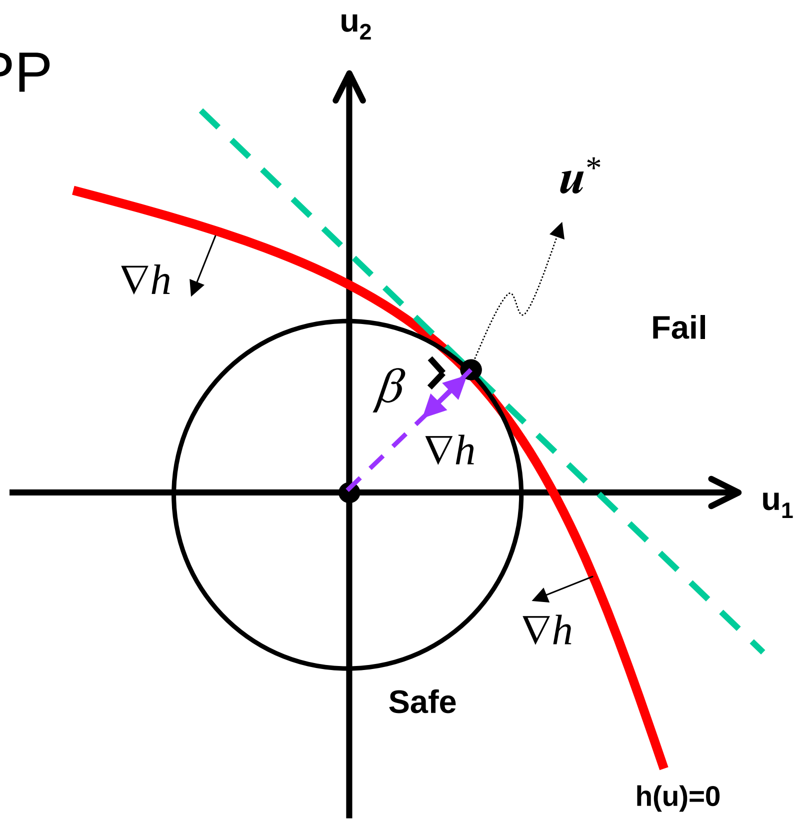
$$P_f = P\left[g(\boldsymbol{x}) \le 0\right] = \int_{g(\boldsymbol{x})\le 0} f_X(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$

$$P_f = \int_{-\infty}^{-\beta} \phi(u)\, du = \Phi(-\beta)$$

信頼性指標 βと設計点 u^*

- 設計点 または MPP

$$\boldsymbol{u}^* = -\beta \frac{\nabla h(\boldsymbol{u}^*)}{\left|\nabla h(\boldsymbol{u}^*)\right|} = -\beta \boldsymbol{\alpha}$$



設計点での限界状態関数の勾配

||

- (設計点ベクトル)

設計点を元の確率変数空間に変換

- 元の変数空間での設計点

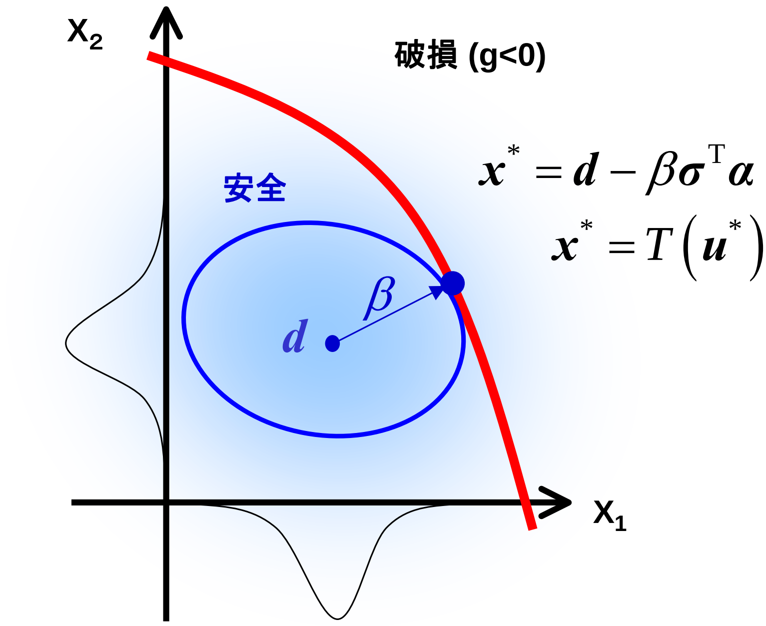
$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{d} - \beta \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}$$

標準偏差

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} = [\sigma_1 \quad \sigma_2]$$

U空間での限界状態関数の単位勾配ベクトル

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\nabla h(\boldsymbol{u}^*)}{\left|\nabla h(\boldsymbol{u}^*)\right|}$$



一次信頼性法 (FORM)

- U空間で限界状態曲面までの最短距離を求める問題
  - 非線形計画問題

$$\text{minimize:} \quad \beta = \sqrt{\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u}}$$
$$\text{subject to:} \ g(\boldsymbol{z}) = h(\boldsymbol{u}) = 0$$

  - Rackwitz-Fiessler法
    - 設計点の性質を利用

繰り返し計算が必要

標準正規分布に変換
$\boldsymbol{U} = \mathrm{T}(\boldsymbol{X})$
初期点 $\boldsymbol{u}^{(0)}$

Rackwitz-Fiessler Algorithm

$$\boldsymbol{u}^{(m+1)} = \left[\boldsymbol{\alpha}^{(m)T} \boldsymbol{u}^{(m)} - \frac{h\left(\boldsymbol{u}^{(m)}\right)}{\left|\nabla h\left(\boldsymbol{u}^{(m)}\right)\right|} \right] \boldsymbol{\alpha}^{(m)}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(m)} = \frac{\nabla h(\boldsymbol{u}^{(m)})}{\left|\nabla h(\boldsymbol{u}^{(m)})\right|}$$

収束？

No

Yes

$$\beta = \left|\boldsymbol{u}^{(m+1)}\right|$$

信頼性に基づく最適設計 (RBDO)

$$\text{Maximize:}\quad f(\boldsymbol{d})$$

$$\text{subject to:}\quad P\left[g_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{X})\le 0\right]\le \Phi(-\beta_{Ti})\quad (i=1,\cdots,p)$$

$$\boldsymbol{d}^L \le \boldsymbol{d} \le \boldsymbol{d}^U$$

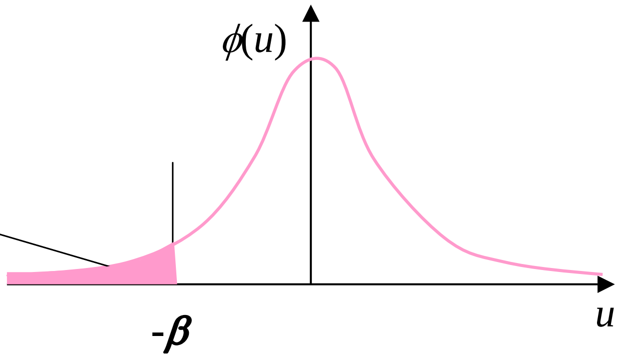
$$\text{where:}\quad \boldsymbol{d}=\mu(\boldsymbol{X})$$

$g_i(\boldsymbol{X}) < 0$ となる確率
= 破損確率

許容確率
$P_t = \Phi(-\beta_i)$
β_{Ti} 信頼性指標

標準正規分布

$$\Phi(-\beta)=\int_{-\infty}^{-\beta}\phi(u)\,du$$



二重ループ問題として定式化

信頼性ループ

標準正規変数に変換
$\boldsymbol{U} = \mathrm{T}(\boldsymbol{X})$
初期点 $\boldsymbol{u}^{(0)}$

ラクビッツ-フィースラー法

$$\boldsymbol{u}^{(m+1)}=\left[\boldsymbol{\alpha}^{(m)T}\boldsymbol{u}^{(m)}-\frac{h\left(\boldsymbol{u}^{(m)}\right)}{\left|\nabla h\left(\boldsymbol{u}^{(m)}\right)\right|}\right]\boldsymbol{\alpha}^{(m)}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(m)}=\frac{\nabla h(\boldsymbol{u}^{(m)})}{\left|\nabla h(\boldsymbol{u}^{(m)})\right|}$$

収束？

No

Yes

$$\beta=\left|\boldsymbol{u}^{(m+1)}\right|$$

メイン 設計ループ

初期設計 $\boldsymbol{d}^{(0)}$

信頼性指標 β を求める

Minimize: $f(\boldsymbol{d}^{(k+1)})$

subject to: $\beta \ge \beta_i$

次の設計候補点

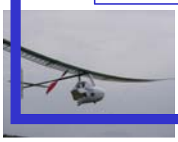
収束？

Yes

No

終了

限界状態関数 $h(\boldsymbol{u})$ はメインループには
陽には現れない



RBDOの問題点と解決策

- 信頼性に基づく最適設計
  - 二重ループとなるため，計算時間がかかる

信頼性を近似評価することで，二重ループを解消し，最適化ループのみにする方法.

•SFA (Safety Factor Approach) (Wu and Wang, 1998)

•SLSV (Single-Loop Single Variable) (Chen et al.,1997)

•SORA (Sequential Optimization and Reliability Analysis)（Du and Chen, 2002)

SLSV法を 信頼性に基づくトポロジー最適設計に適用

- **計算効率改善のために･･･**
  - **SLSV法を採用.**
  - **SLSV法がSORA, SFAより効率がいいらしい（Yang and Gu (2001, and 2005))**
- **信頼性に基づくトポロジー最適設計に適用**
  - **近似精度，計算効率，収束特性を確認.**
- **複数の破損規準**
  - **定式化に何が必要か？**

SLSV (Single-Loop Single Variable)

- 設計点情報を利用して，信頼性制約を確定的な制約条件に近似する.
  - 設計点(MPP)において，g(x*) = 0

$$\boxed{g\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)=g\left(\boldsymbol{d}-\beta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)=0}$$

  - 限界状態関数は設計点で等号成立
  - 信頼性制約を限界状態関数の制約に置き換える.

$$g\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)=g\left(\boldsymbol{d}-\beta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\geq 0$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\nabla g\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)}{\left|\nabla g\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)\right|}$$

$\boldsymbol{\alpha}$ が未知.
繰り返し計算で前回の値で近似する

SLSV法のフロー

- 未知勾配 α を前回の繰り返し点で近似.
- 二重ループを解消.

初期設計 $\boldsymbol{d}^{(0)}$ an $\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{d}^{(0)}$

限界状態関数の勾配 $\boldsymbol{\alpha}^{(k)}=\dfrac{\nabla g_i(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\left|\nabla g_i(\boldsymbol{x}^{(k)})\right|}$

Maximize: $f\left(\boldsymbol{d}^{(k+1)}\right)$

subject to : $g\left(\boldsymbol{d}^{(k+1)}-\beta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right)\geq 0$

直線探索で，$\boldsymbol{d}^{(k+1)}$ を求める

収束？

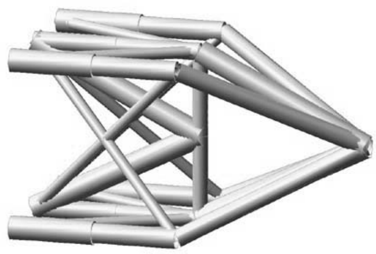
Yes → 終了

No → $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{d}^{(k+1)}-\beta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}^{(k)}$ → $k=k+1$ → 限界状態関数の勾配

最適化ループに限界状態関数が陽に現れる.

フレーム構造に対する信頼性に基づく最適設計
これまでの研究

- 第1報 (Mogami et al. 2006)
  - 剛性 (平均コンプライアンス), 振動数に対する規準に対するシステム信頼性
  - 設計変数: フレーム要素の断面積
    - 密度法, SIMP法を利用したトポロジー最適化
  - 確率変数: (負荷荷重, 非構造質量)
  - 二重ループ法を採用
- 第2報 (Kogiso et al. 2007)
  - 断面積の不確定性も考慮 → 確率変数の数も増大.
  - 二重ループ法を採用
  - 信頼性解析に莫大な時間がかかる.
    - 大規模構造への適用が困難



限界状態関数の正規化

- 数値計算安定のためのちょっとした工夫
  - **限界状態関数が最適化ループに陽に現れるため**, 限界状態関数を正規化することにした.

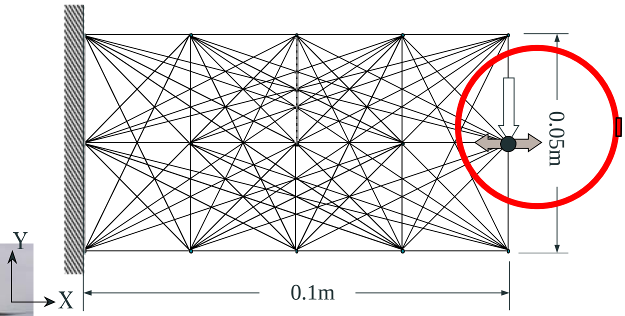
$$\begin{aligned}
&\text{Minimize :} \quad \text{Volume}(\boldsymbol{d}) \\
&\text{subject to :} \quad P\left(g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}) \le 0\right) \le \Phi\left(-\beta_T\right) \quad (i=1,2) \\
&\text{where:} \quad \boxed{\begin{aligned} g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}) &= \frac{l\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}\right)-l^U}{l^U} \\ g_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}) &= \frac{\Lambda^L-\Lambda\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}\right)}{\Lambda^L} \end{aligned}} \\
&\qquad\qquad \boldsymbol{d}^L \le \boldsymbol{d} \le \boldsymbol{d}^U
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}) &= l\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}\right)-l^U \\ g_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}) &= \Lambda^L-\Lambda\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}\right) \end{aligned}}$$

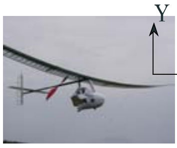
例 1 ― 二次元フレーム

- 信頼性制約のもとでの体積最小化
  - 平均コンプライアンス，固有振動数
- 設計条件
  - 体積1%制約のもとでの確定的な最適設計から決定.

$$\beta_T = 3.0$$
$$l^U = 2.497 \times 10^{-5} [\mathrm{J}]$$
$$\Lambda^L = 16.14 \quad [\mathrm{Hz}]$$

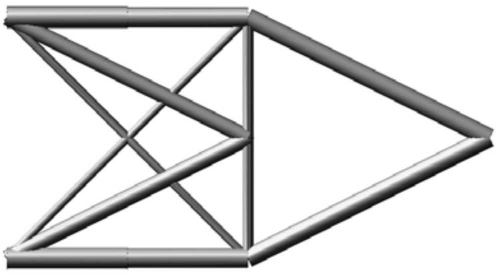


	Mean	Std. Dev.
f_x [N]	0	3.0
f_y [N]	10	1.0
M [kg]	1.0	0.2



SLSV法の性能を比較

- 従来の二重ループ法と比較
  - 従来の最適解と同等の形態が得られる.
  - 信頼性の近似精度は十分高い.
  - 限界状態関数の評価回数は10分の１以下

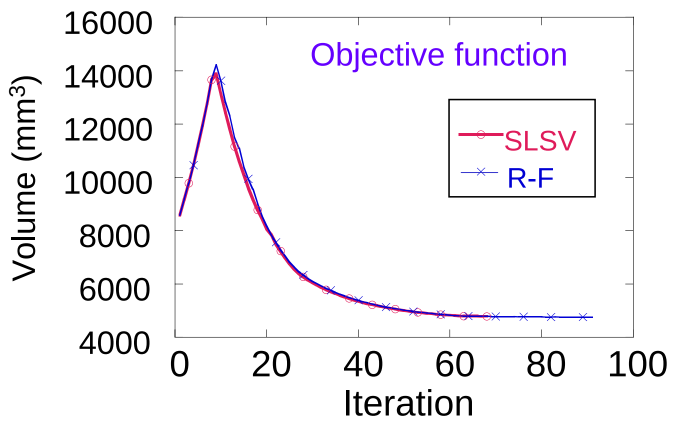


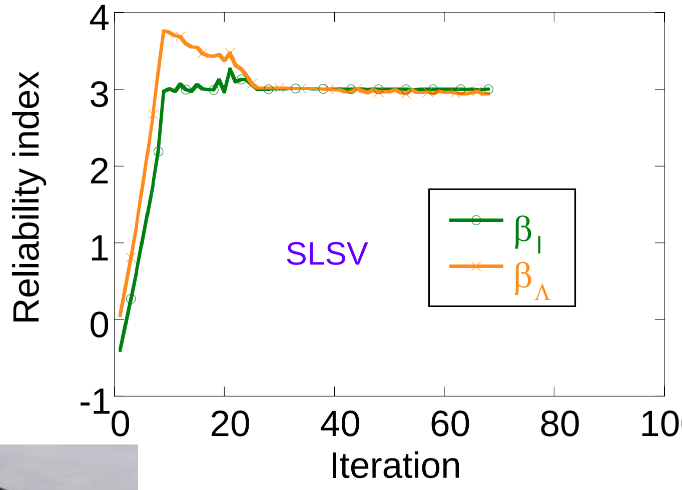
最適形態

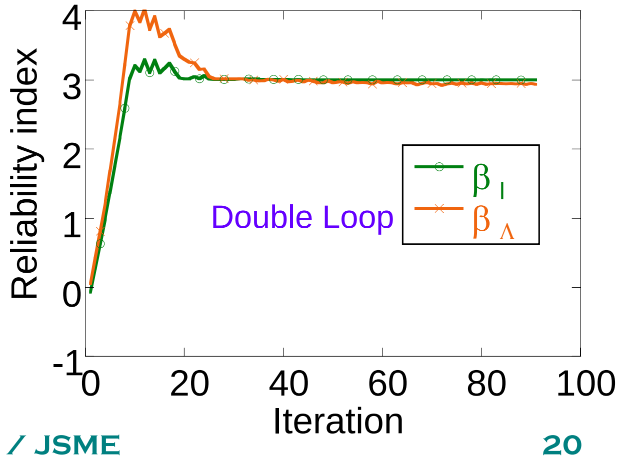
	SLSV	従来
β_l	3.002	3.000
β_Λ	2.944	2.936
Volume (mm³)	4787	4764
NFE (g1)	**68**	**641**
NFE (g2)	**68**	**811**

収束特性

- 従来の二重ループ法と同等
  - 注意：SLSV法は信頼性評価をしない．→ グラフ作成のためにわざわざ評価している．





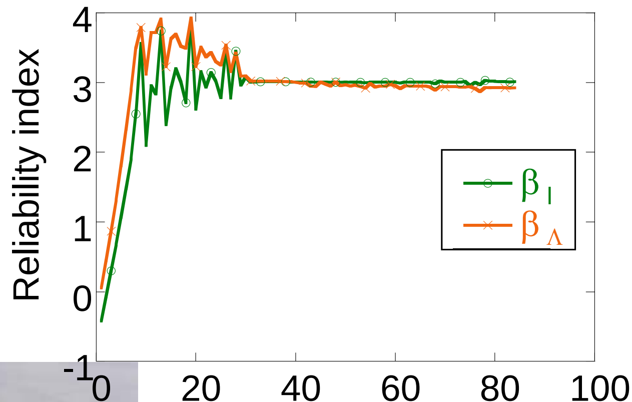


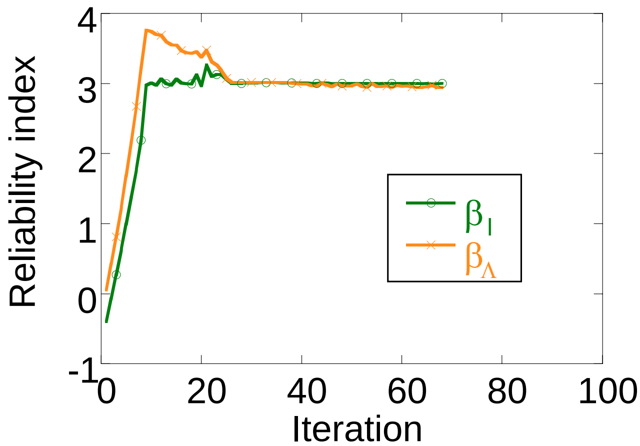
実は・・・収束特性の改善

- **限界状態関数の正規化による収束特性の改善**

$$\text{Maximize:} \quad f\left(\boldsymbol{d}^{(k+1)}\right)$$

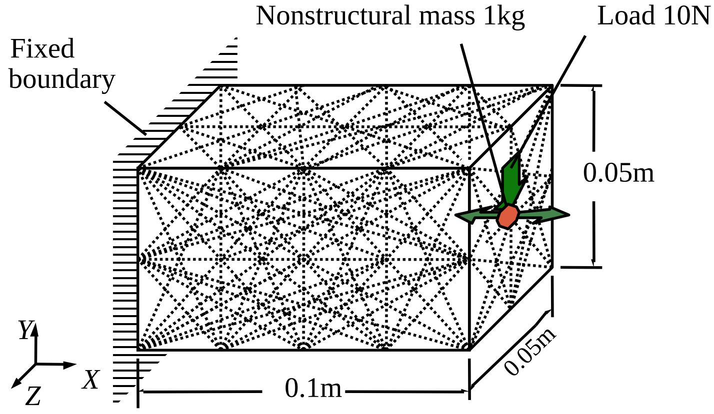
$$\text{subject to:} \quad g_i\left(\boldsymbol{d}^{(k+1)} - \beta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}^{(k)}\right) \geq 0 \qquad (i = 1, \cdots, m)$$





例 2:3次元フレーム

- 平均コンプライアンス，振動数に対する信頼性規準のもとでの体積最小化



設計条件

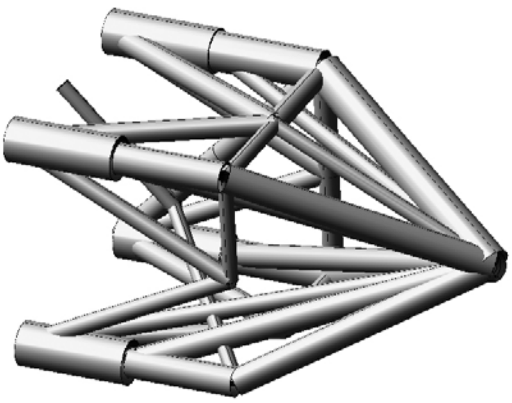
$$\beta_T = 3.0$$
$$l^U = 2.085\times10^{-6}[\mathrm{J}]$$
$$\Lambda^L = 36.05 \quad [\mathrm{Hz}]$$

確率変数

	Mean	Std. Dev.
f_x [N]	0	2.0
f_y [N]	10	1.0
M [kg]	1.0	0.2

SLSV法の性能を比較

- 10倍以上の計算効率向上
- 信頼性の近似精度は十分



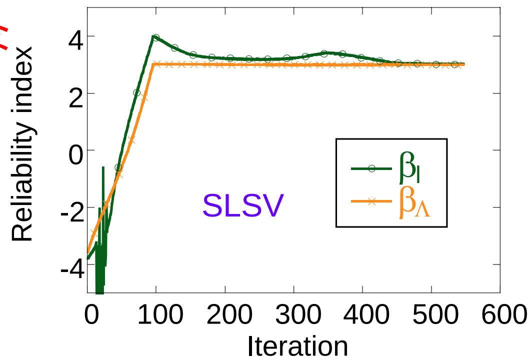
Optimum Configuration

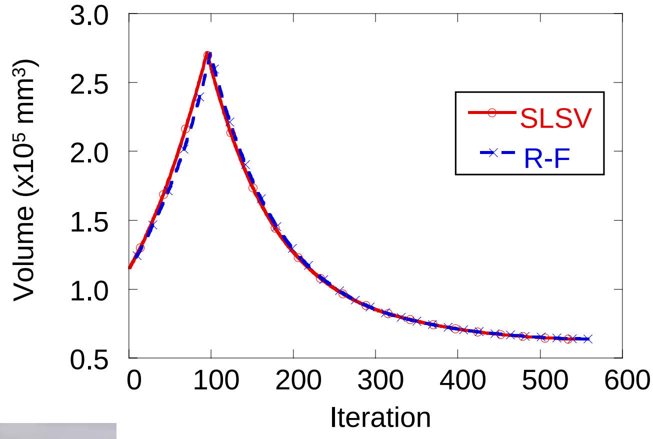
Calculation Summary

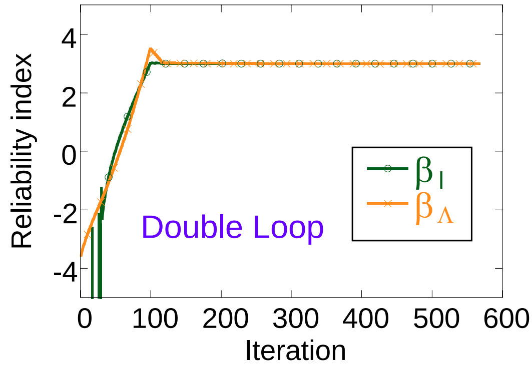
	SLSV	R-F
β_l	3.025	3.000
β_Λ	2.995	2.995
Volume (mm^3)	63841	63930
NFE (g1)	**547**	**7169**
NFE (g2)	**547**	**10290**

収束特性

- 従来の二重ループ法と同等
  - 注意：SLSV法は信頼性評価をしない．→ グラフ作成のためにわざわざ評価している．







例2-2：3次元フレーム構造

- 目標信頼性指標を変更した場合

β_T= 4.0 の場合

	SLSV	R-F
β_l	4.090	4.000
β_Λ	3.987	3.991
Volume (mm^3)	71143	72059
NFE (g1)	**555**	**10149**
NFE (g2)	**555**	**7654**

β_T= 5.0 の場合

	SLSV	R-F
β_l	5.077	5.000
β_Λ	4.992	4.994
Volume (mm^3)	78544	79680
NFE (g1)	**586**	**21278**
NFE (g2)	**586**	**17908**

結論

- SLSV法を信頼性に基づくトポロジー最適設計に適用.
  - 信頼性に対して，複数の規準
- 数値計算例を通して･･
  - SLSV法の計算効率の高さを実証.
    - 限界状態関数の評価回数は10分の1以下.
    - CPU時間は約6分の1
      - 感度解析回数は繰り返し数とほぼ同等.
  - 信頼性指標の近似精度は十分高い.
  - 限界状態関数の正規化により，収束特性が改善された.
    - SLSV法では，限界状態関数が最適化ループに陽に現れる.

今後の課題

- 実構造への適用
- 収束特性のさらなる改善
  - Ex. (Lee et al., (2002) and Youn et al., (2003))
- モード信頼性 → システム信頼性評価へ
  - Ba-abbad et al. (2006), McDonald and Mahadevan (2008)
- 第8回最適化シンポジウム2008 (OPTIS 2008)
  2008年11月27-28日 @東工大