

設計と運用に活かすデータ同化研究会

日時：2021年02月19日（金）13:00-14:00 Q&Aを含む

場所：オンライン (Zoom)



観測ノイズを考慮した スパースセンサ位置最適化

関連論文

- Saito *et al.*, *arXiv:1911.08757*, 2019.
- Nakai *et al.*, *arXiv:2007.05377*, 2020.
- Yamada *et al.*, *MSSP*, to appear. *arXiv:1912.01776*
- Saito *et al.*, *IEEE Sens. Lett.*, 2020.
- Kanda *et al.*, *Trans. JSASS*, to appear.

東北大学大学院工学研究科
航空宇宙工学専攻・助教
齋藤勇士

浅井先生, 野々村先生, 中井研究員, 永田研究員, 山田君 (M2), 神田君 (M2)



自己紹介

略歴 (静岡県浜松市 生)

2012年 国立沼津工業高等専門学校 卒業→北海道大学編入学

2016年 北海道大学 大学院工学院 機械宇宙工学専攻 修士課程 修了

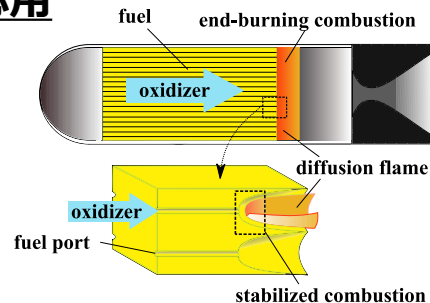
2018年 同上 博士課程 修了, 博士(工学)取得(永田晴紀教授)

2018年 東京大学大学院新領域創成科学研究科 特任研究員@工学部7号館(小泉宏之准教授)

2019年 東北大学大学院工学研究科 助教

主な研究内容:

- CAMUI型ハイブリッドロケットの研究開発
- 端面燃焼式ハイブリッドロケットの研究開発
- 金属-水ハイブリッドロケットの研究開発
- 超小型人工衛星『EQUULEUS』推進系の開発
- スパースセンシングの研究開発と(主に)航空宇宙分野への応用



目次

- 観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

1. 研究背景と本研究の狙い

- 実験で取得される膨大なデータとそのリアルタイム制御に向けて
- 低次元モデル (SVD)
- スパースセンサ位置最適化

2. データ駆動型スパースセンサ位置最適化

- センサ位置最適化と貪欲法による準最適化
- 最適実験計画法 (DG, EG, AG)
- 線形最小二乗推定を用いた場再構成 (地球海面温度, PIV)

3. 観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

- 本研究における観測ノイズ
- 観測ノイズを考慮した最適化 (DG(CN), BDG)
- 一般線形最小二乗推定とベイズ推定を用いた場再構成 (PIV)

4. ダイナミクスを考慮したスパースセンサ位置最適化

- 可観測性グラミアン
- 場再構成 (PIV)

5. 今後の発展とまとめ

- ベクトル計測への拡張
- スパースプロセッシングPIVによるリアルタイム計測

目次

- 観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

1. 研究背景と本研究の狙い

- 実験で取得される膨大なデータとそのリアルタイム制御に向けて
- 低次元モデル (SVD)
- スパースセンサ位置最適化

2. データ駆動型スパースセンサ位置最適化

- センサ位置最適化と貪欲法による準最適化
- 最適実験計画法 (DG, EG, AG)
- 線形最小二乗推定を用いた場再構成 (地球海面温度, PIV)

3. 観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

- 本研究における観測ノイズ
- 観測ノイズを考慮した最適化 (DG(CN), BDG)
- 一般線形最小二乗推定とベイズ推定を用いた場再構成 (PIV)

4. ダイナミクスを考慮したスパースセンサ位置最適化

- 可観測性グラミアン
- 場再構成 (PIV)

5. 今後の発展とまとめ

- ベクトル計測への拡張
- スパースプロセッシングPIVによるリアルタイム計測

研究背景

-実験で取得される膨大なデータとそのリアルタイム制御に向けて

□ 航空宇宙機が有する不具合事象

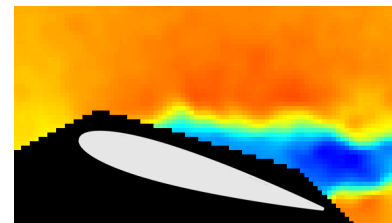
- ロケットエンジン：燃焼振動
- ロケット／飛行機：バフエット

□ $O(10^{-3}-10^{-6})$ 秒の超高速・非定常現象

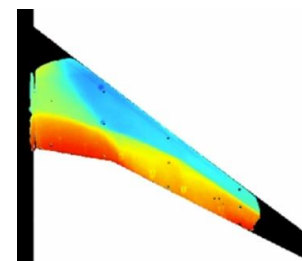
- 数値計算では解くことが困難であるため、実験で現象を理解
- 光学系の急速な技術発展で、場としてデータ取得可
→オフラインでの場としての観測は可能になった

□ 不具合事象を事前検知／リアルタイム制御にむけて

- リアルタイムで「場としての観測」が必要
 - 膨大なデータ量の**低次元化**が必要
 - 航空宇宙機に搭載可能な**センサ数**が限られている



Nankai et al., 2019



Sugioka et al., 2018



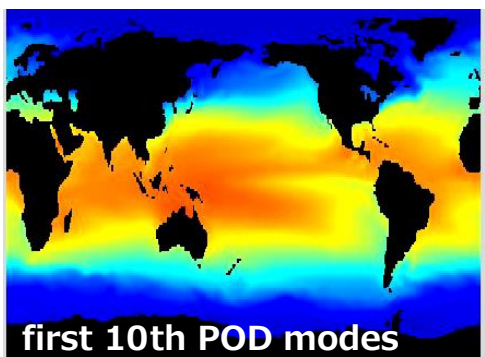
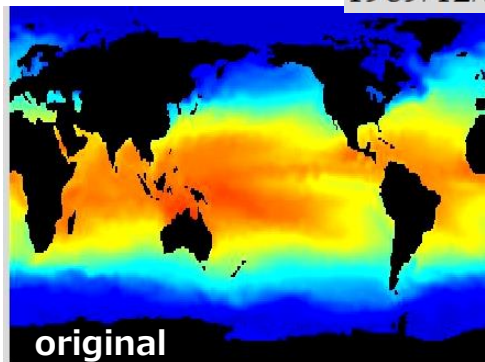
ロケット周りバフエット
圧カデータ：**14 TB**
Sellers et al., 2017

研究背景 - 低次元化

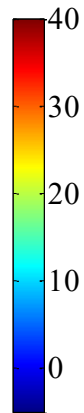
固有直交分解 (POD) :

多次元データから低次元成分を抽出する分解方法

1989/12/31

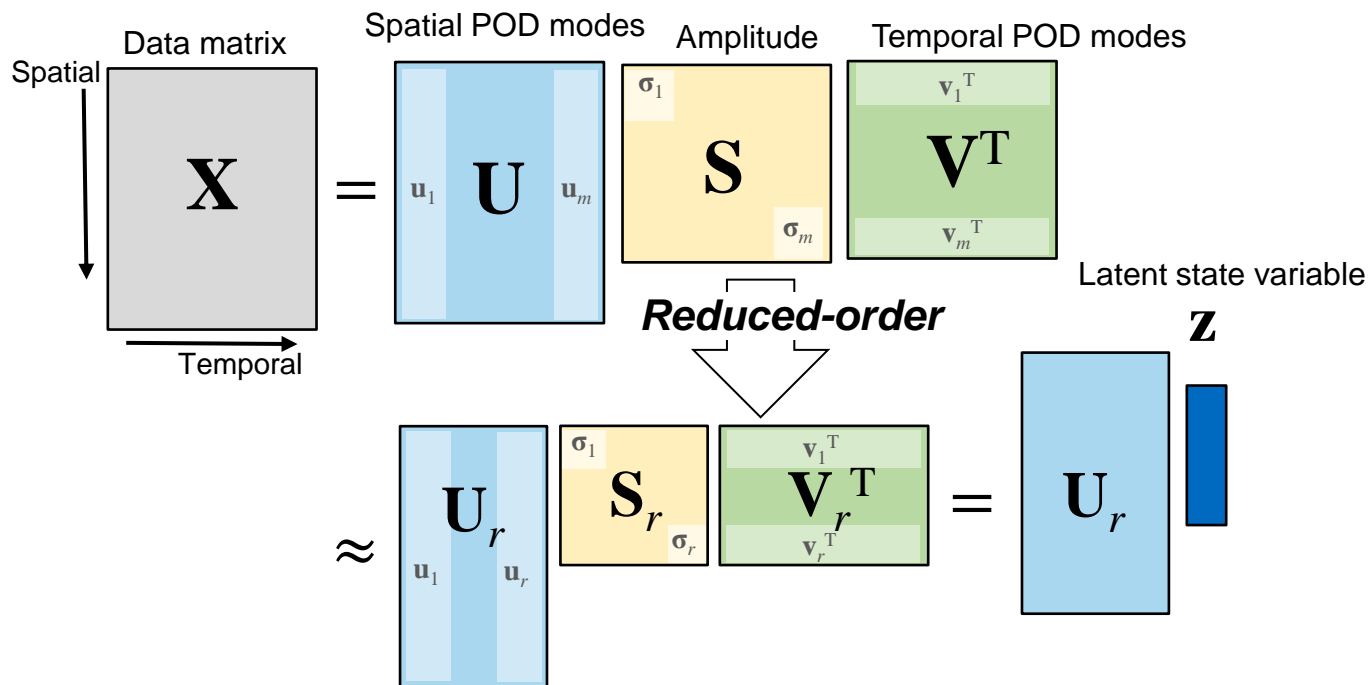


Temperature
[°C]



モード数10までで再構成

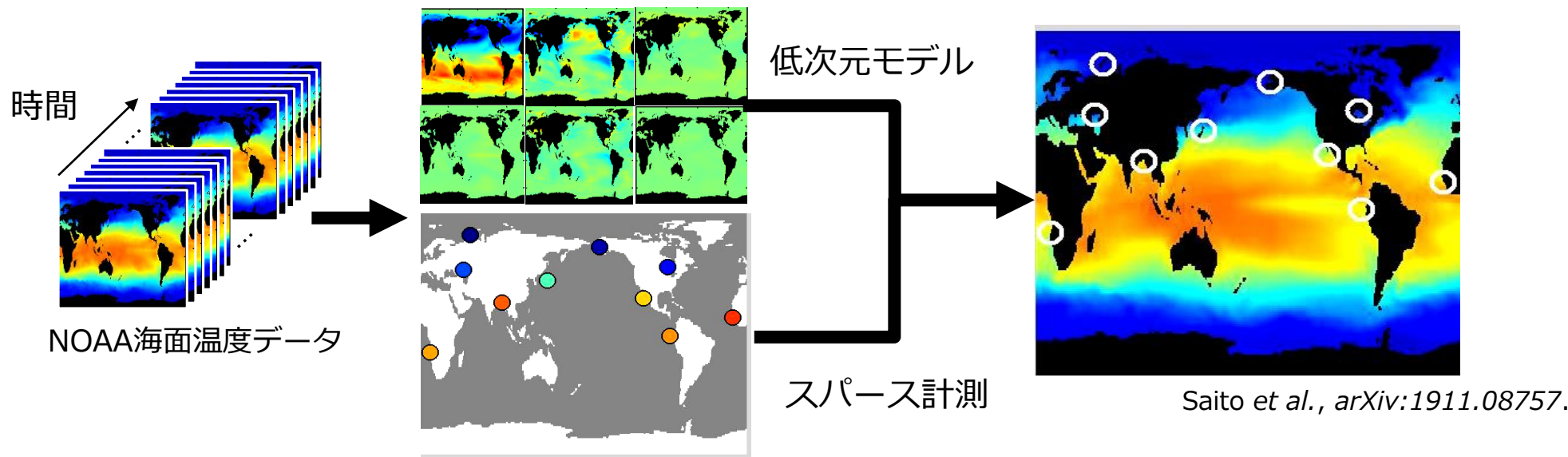
NOAA optimum interpolation ocean Sea Surface Temperature weekly data



✓ 限られたモード数でデータを表現することが可能
→ 低次元化, データ量の大幅削減

✓ 感度の良い場所にセンサを置くだけで, データを表現できれば, さらなるデータ量の削減が可能

低次元化した大規模データの背後に少数の説明変数のみが存在する「スパース性」に着目した『データ駆動型スパースセンシング』



- 低次元モデル+スパースセンシングで場の高速リアルタイム再構成が実現可能
- 再構成の精度は向上の余地あり

観測ノイズに強い状態推定のためのスパースセンサ位置決定手法を開発する

今回紹介する手法

- D-最適実験計画法に基づくセンサ位置最適化
- 観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化
- ダイナミクスを考慮したスパースセンサ位置最適化

当研究室での研究開発状況（センサー選択）

➤ **D-optimalityに基づく貪欲法**

- Saito *et al.*, *IEEE Access* (under review). arXiv:1911.08757

➤ 複数成分のQR分解ベースの貪欲法

- Saito *et al.*, *IEEE Sens. Lett.* (2020). DOI: 10.1109/LSENS.2020.2999186

➤ 貪欲法の目的関数の影響調査

- Nakai *et al.*, *IEEE Access* (under review). arXiv:2007.05377

➤ **事前情報を有効利用した行列式ベースの貪欲法**

- Yamada *et al.*, *Mech. Syst. Signal Process.* (2021). arXiv:1912.01776

➤ 乱択部分空間ニュートン法による凸緩和法

- Nonomura *et al.*, *IEEE Signal Process. Lett.* (2021). DOI: 10.1109/LSP.2021.3050708

➤ 近接分離最適化法による方法

- Nagata *et al.*, *IEEE Sens. J.* (under review). arXiv:2010.09329

開発中・テスト中

- 可観測性グラミアンやカルマンフィルタの定常誤差共分散行列でのセンサー選択
- 各手法の多成分データへの拡張
- Elite and Randomized Group Greedy法
- Nondominated Multiobjective Greedy法

目次

観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

1. 研究背景と本研究の狙い

- ビックデータとリアルタイム制御
- 低次元モデル (SVD)
- スパースセンサ位置最適化

2. データ駆動型スパースセンサ位置最適化

- センサ位置最適化と貪欲法による準最適化
- 最適実験計画法 (DG, EG, AG)
- 線形最小二乗推定を用いた場再構成 (地球海面温度, PIV)

3. 観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

- 本研究における観測ノイズ
- 観測ノイズを考慮した最適化 (DG(CN), BDG)
- 一般線形最小二乗推定とベイズ推定を用いた場再構成 (PIV)

4. ダイナミクスを考慮したスパースセンサ位置最適化

- 可観測性グラミアン
- 場再構成 (PIV)

5. 今後の発展とまとめ

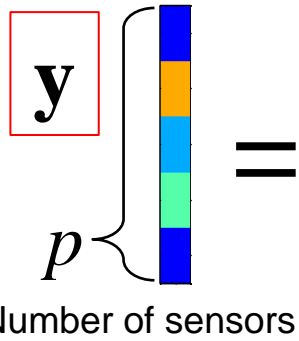
- ベクトル計測への拡張
- スパースプロセッシングPIVによるリアルタイム計測

Observation vector

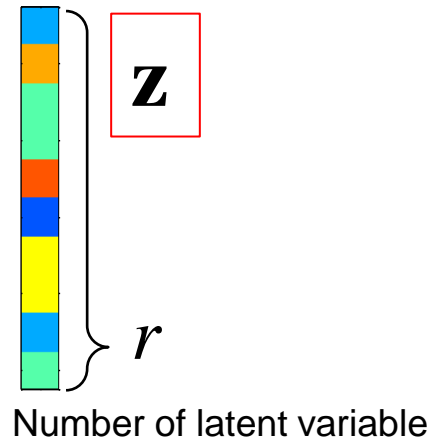
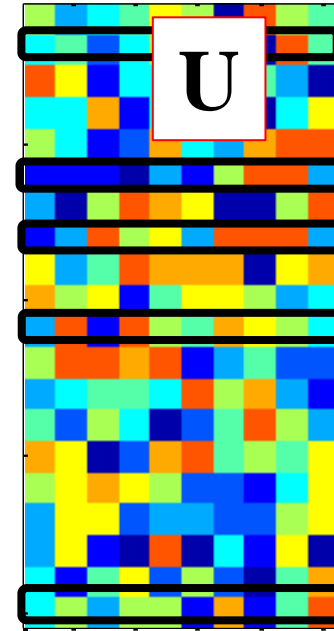
Sensor location matrix

Sensor candidate matrix

Latent state variable



0	0	0	0	0	H										1					
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



Number of sensors

Number of latent variable

$$y = HUz = Cz \quad (C: \text{measurement matrix})$$

$$\Rightarrow \hat{z} = C^\dagger y$$

$$\min |z - \hat{z}|$$

厳密な最適解
 センサ位置の組み合わせ全てに
 対する目的関数の評価により
 得られる解⇒ 組み合わせ爆発

貪欲法による準最適解

最適実験計画法 (DG, AG, EG)

線形最小二乗推定
(LS: Least-Squares estimation)

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{w}$$

$E[\mathbf{w}\mathbf{w}^T] = \sigma^2\mathbf{I}$
white noise

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{y}$$

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{y}$$

誤差共分散行列

$$E \left[(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}) (\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}})^T \right] \begin{cases} \propto (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1} & p \leq r \text{ 劣決定系} \\ \propto (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} & p > r \text{ 優決定系} \end{cases}$$

True value Estimated value

Nakai et al., arXiv:2007.05377.

Optimality criterion

Objective function

■ **D-optimality (DG)**
DG: Determinant based Greedy
 Minimizing the area of confidence ellipsoid

$\max \begin{cases} \det(\mathbf{C}\mathbf{C}^T) \\ \det(\mathbf{C}^T \mathbf{C}) \end{cases}$ 計算の工夫により
 計算量の軽量化が
 可能
 Saito et al., arXiv:1911.08757.

■ **A-optimality (AG)**
 Minimizing the mean squared error

$\min \begin{cases} \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1} \\ \text{tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \end{cases}$

■ **E-optimality (EG)**
 Minimizing the worst-case variance of error

$\max \begin{cases} \lambda_{\min}(\mathbf{C}\mathbf{C}^T) \\ \lambda_{\min}(\mathbf{C}^T \mathbf{C}) \end{cases}$

DGの高速実装：行列式補題

$k = r, \dots, p$

$p \leq r$ 劣決定系

$$i_k = \arg \max_i \det(\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k^\top) = \arg \max_i \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k-1} \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k-1}^\top & \mathbf{v}_i^\top \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}_k \mathbf{C}_k^\top) &= \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k-1} \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k-1}^\top & \mathbf{v}_i^\top \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^\top & \mathbf{C}_{k-1} \mathbf{v}_i^\top \\ \mathbf{v}_i \mathbf{C}_{k-1}^\top & \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\top \end{bmatrix} \right) \\ &= \det(\mathbf{C}_{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^\top) \det \left(\mathbf{v}_i \left(\mathbf{I} - \mathbf{v}_i \mathbf{C}_{k-1}^\top (\mathbf{C}_{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^\top)^{-1} \mathbf{C}_{k-1} \right) \mathbf{v}_i^\top \right) \\ &= \det(\mathbf{C}_{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^\top) \left(\mathbf{v}_i \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}_{k-1}^\top (\mathbf{C}_{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^\top)^{-1} \mathbf{C}_{k-1} \right) \mathbf{v}_i^\top \right) \end{aligned}$$

$p > r$ 優決定系

$$i_k = \arg \max_i \det(\mathbf{C}_k^\top \mathbf{C}_k) = \arg \max_i \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k-1}^\top & \mathbf{v}_i^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k-1} \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix} \right)$$

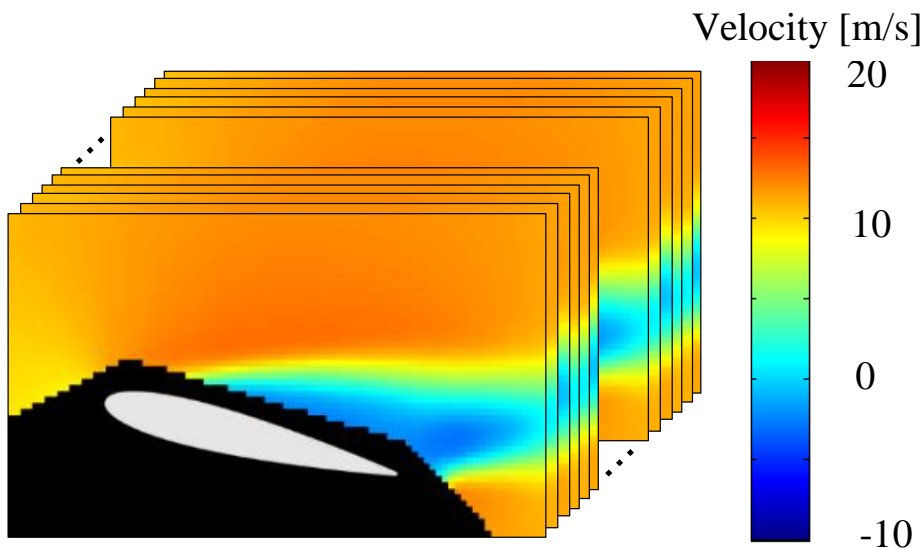
$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}_k^\top \mathbf{C}_k) &= \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k-1}^\top & \mathbf{v}_i^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k-1} \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix} \right) \\ &= \det(\mathbf{C}_{k-1}^\top \mathbf{C}_{k-1} + \mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_i) \\ &= \det \left(\mathbf{C}_{k-1}^\top \mathbf{C}_{k-1} \left(\mathbf{I} + (\mathbf{C}_{k-1}^\top \mathbf{C}_{k-1})^{-1} \mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_i \right) \right) \\ &= \det(\mathbf{C}_{k-1}^\top \mathbf{C}_{k-1}) \det \left(\mathbf{I} + (\mathbf{C}_{k-1}^\top \mathbf{C}_{k-1})^{-1} \mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_i \right) \\ &= \det(\mathbf{C}_{k-1}^\top \mathbf{C}_{k-1}) \det \left(1 + \mathbf{v}_i (\mathbf{C}_{k-1}^\top \mathbf{C}_{k-1})^{-1} \mathbf{v}_i^\top \right) \\ &= \left(1 + \mathbf{v}_i (\mathbf{C}_{k-1}^\top \mathbf{C}_{k-1})^{-1} \mathbf{v}_i^\top \right) \det(\mathbf{C}_{k-1}^\top \mathbf{C}_{k-1}) \end{aligned}$$

matrix inversion lemmaを用いる

テストデータの紹介

翼型周りの主流方向の流速場 (PIV)

Nankai et al., 2019.

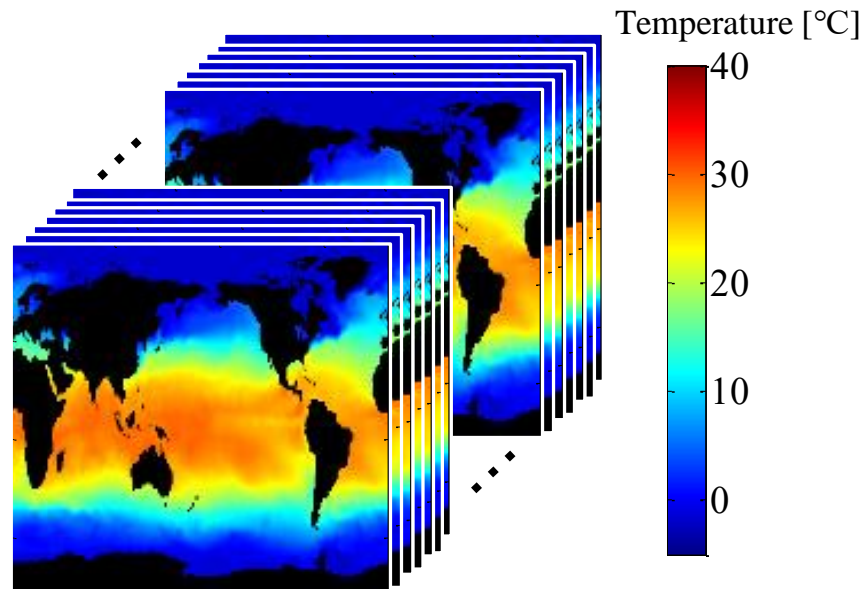


センサ候補点 : 3048

スナップショット枚数 : 500

地球海面温度場

NOAA sst



センサ候補点 : 44219

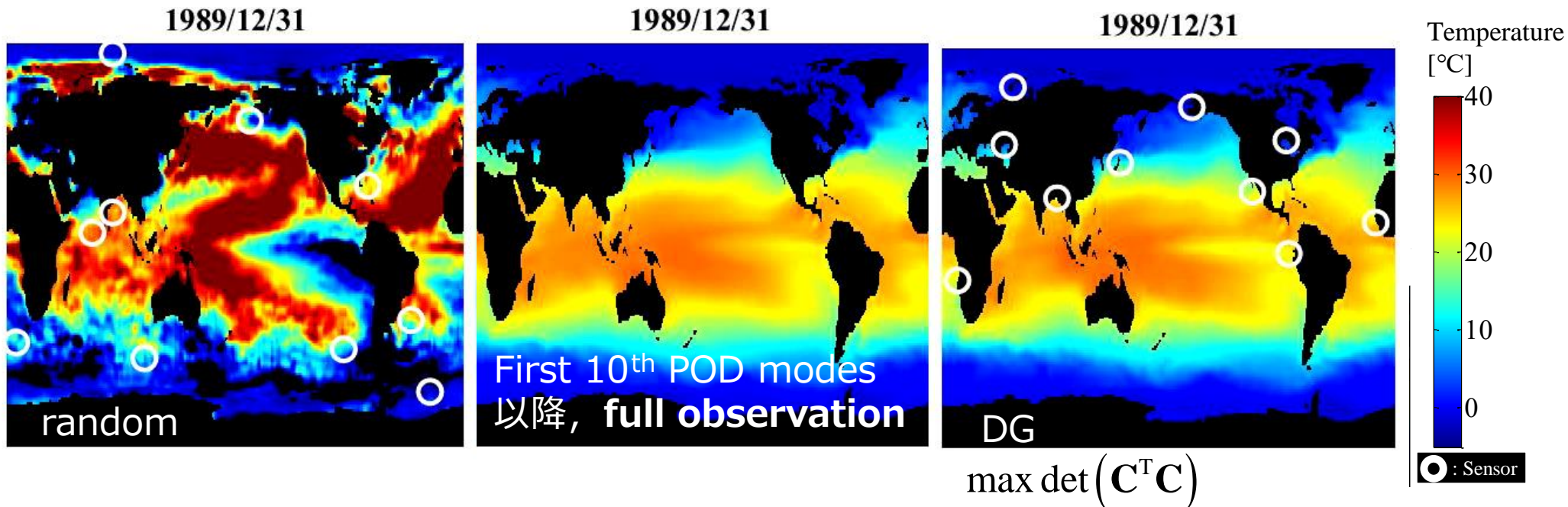
スナップショット枚数 : 520

(1990年から2000年の10年間の週平均)

線形最小二乗推定を用いた場再構成 (地球海面温度)

センサ数 10, PODモード 10, 線形最小二乗推定 (LS)

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{y}$$

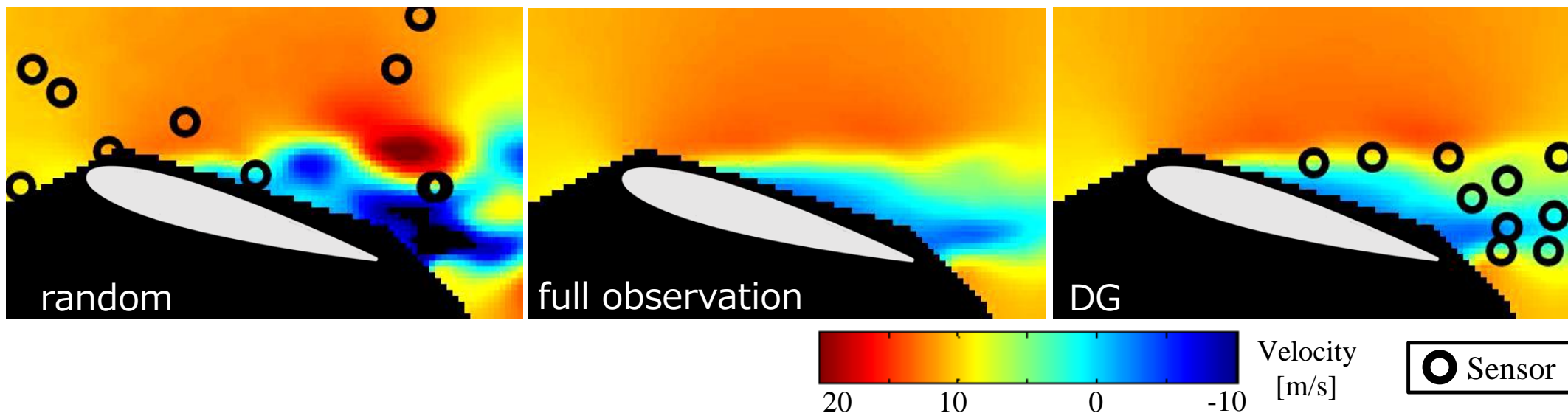


- random: 全体場推定は困難 (スパースセンサ位置の最適化が必要)
- DG: 温度変動の大きいところにセンサを配置

線形最小二乗推定を用いた場再構成 (PIV)

センサ数 10, PODモード 10, 線形最小二乗推定 (LS)

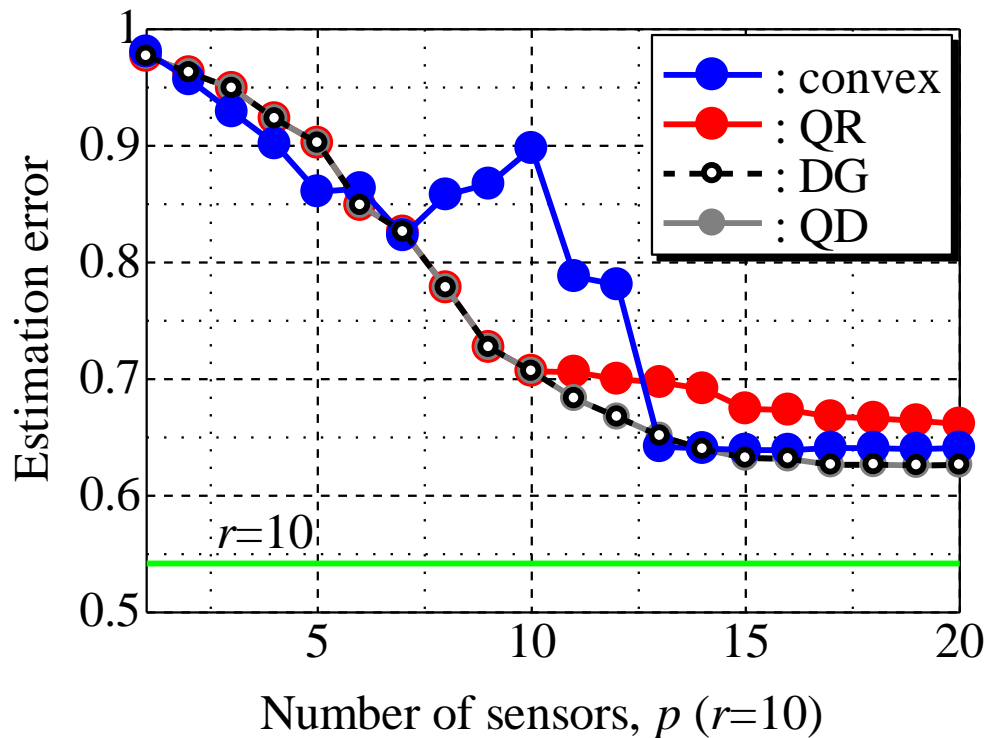
$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{y}$$



- random: 全体場推定は困難 (スパースセンサ位置の最適化が必要)
- DG: full observation と同等. 速度変動の大きいところにセンサを配置

線形最小二乗推定を用いた場再構成 - 再構成誤差

線形最小二乗推定 (LS) $\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{y}$



◆ **convex** : 凸関数に緩和して解く. ニュートン法で解くがヘシアンの計算コスト大

Joshi and Boyd, 2008.

◆ **QR** : QR分解を使って解く

Manohar et al., 2018.

◆ **QD** : 劣決定系までをQRで解き, 優決定系からDGを使って解く. 数学的にDGと等価.

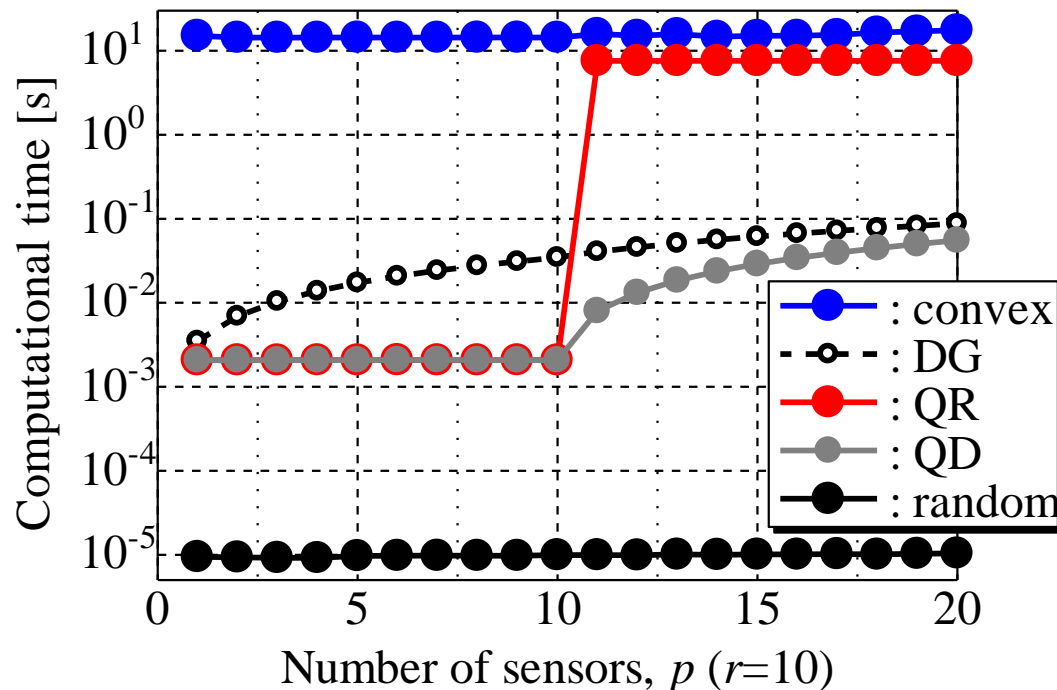
Saito et al., arXiv:1911.08757.

- 再構成誤差 : $\text{DG}=\text{QD} < \text{convex} < \text{QR}$

線形最小二乗推定を用いた場再構成

-計算時間

線形最小二乗推定 (LS) $\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{y}$



- ◆ **convex** : 凸関数に緩和して解く. ニュートン法で解くがヘシアンの計算コスト大

Joshi and Boyd, 2008.

- ◆ **QR** : QR分解を使って解く

Manohar et al., 2018.

- ◆ **QD** : 劣決定系までをQRで解き, 優決定系からDGを使って解く. 数学的にDGと等価.

Saito et al., arXiv:1911.08757.

- 再構成誤差 : $\text{DG} = \text{QD} < \text{convex} < \text{QR}$
- 計算時間 : $\text{QD} < \text{DG} \ll \text{QR} < \text{convex}$

目次

観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

1. 研究背景と本研究の狙い

- ビックデータとリアルタイム制御
- 低次元モデル (SVD)
- スパースセンサ位置最適化

2. データ駆動型スパースセンサ位置最適化

- センサ位置最適化と貪欲法による準最適化
- 最適実験計画法 (DG, EG, AG)
- 線形最小二乗推定を用いた場再構成 (地球海面温度, PIV)

3. 観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

- 本研究における観測ノイズ
- 観測ノイズを考慮した最適化 (DG(CN), BDG)
- 一般線形最小二乗推定とベイズ推定を用いた場再構成 (PIV)

4. ダイナミクスを考慮したスパースセンサ位置最適化

- 可観測性グラミアン
- 場再構成 (PIV)

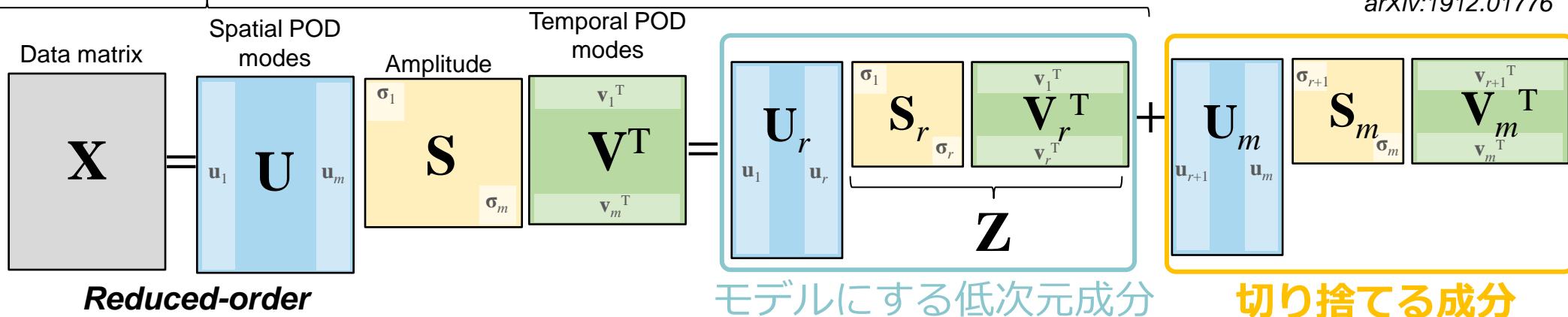
5. 今後の発展とまとめ

- ベクトル計測への拡張
- スパースプロセッシングPIVによるリアルタイム計測

観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

今までの枠組み

Yamada et al., *MSSP*, to appear.
arXiv:1912.01776

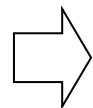


全観測量

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}_r \mathbf{z} + \mathbf{w} \leftarrow \text{観測ノイズ}$$

観測ノイズの
共分散行列

$$\mathfrak{R} = \mathbb{E}(\mathbf{w}\mathbf{w}^T) = \mathbb{E}\left((\mathbf{x} - \mathbf{U}_r \mathbf{z})(\mathbf{x} - \mathbf{U}_r \mathbf{z})^T\right) \approx \mathbf{U}_m \mathbf{S}_m^2 \mathbf{V}_m^T$$



$$\mathbf{R} = \mathbf{H}\mathfrak{R}\mathbf{H}^T \approx \mathbf{H}\mathbf{U}_m \mathbf{S}_m^2 \mathbf{V}_m^T \mathbf{H}^T$$

状態変数の分散

$$\mathbf{Q} = \mathbb{E}(\mathbf{z}\mathbf{z}^T) = \frac{1}{m} \mathbf{S}_r^2$$

切り捨てる成分

||

観測ノイズ

※「距離モデル」を導入することもできるが、パラメタを適切に選ぶ必要があり、すべてデータ駆動で実施

観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{U}\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{z}$$

C 観測行列

Q 状態変数の分散

R 観測ノイズの共分散行列

一般線形最小二乗推定

(GLS: **G**eneralized **L**east **S**quares estimation)

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{y}$$

ベイズ推定

(BE: **B**ayesian **E**stimation)

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{Q}^{-1})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{y}$$

$$\min |\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}|$$

DG (CN)

CN: Correlated Noise

$$\max \begin{cases} \det(\mathbf{R}^{-1}) \det(\mathbf{C}\mathbf{C}^T) & p \leq r \\ \det(\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}) & p > r \end{cases}$$

BDG:

Bayesian **D**eterminant based **G**reedy

$$\max \det(\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{Q}^{-1})$$

$k = r, \dots, p$

$$i_k = \max \det \left(\mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k + \mathbf{Q}_k^{-1} \right)$$

$$\det(\mathbf{W}_k) \equiv \det \left(\mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k + \mathbf{Q}_k^{-1} \right)$$

センサノイズの共分散（ここでは打ち切った高次のPODモードに起因する共分散）

事前にわかっているPODモードの
大体の大きさ

新しいセンサと
既に選んだセンサの
相互相関ベクトル

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k-1} \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k-1} & \mathbf{s}_k^T \\ \mathbf{s}_k & t_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{h}_i \mathbf{U}_m \mathbf{S}_m^2 \mathbf{V}_m^T \mathbf{H}_{k-1}^T$$

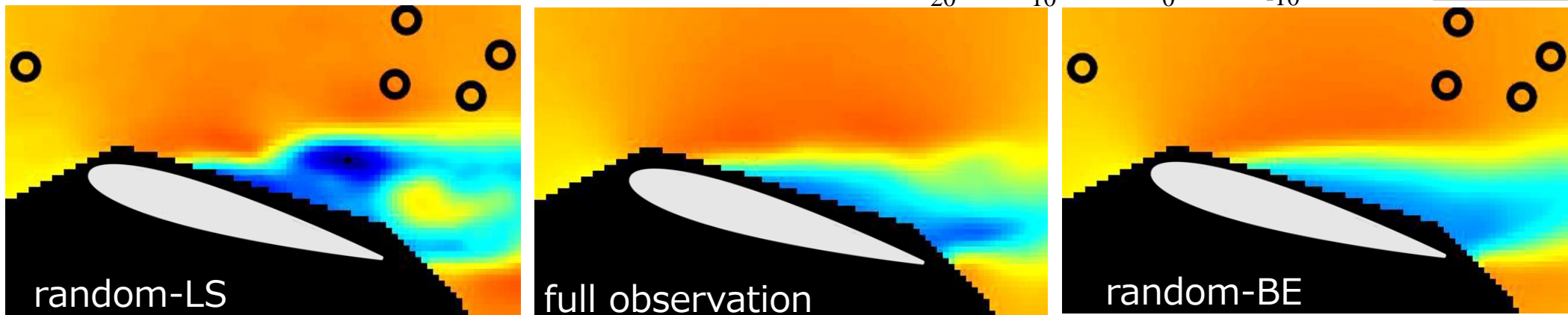
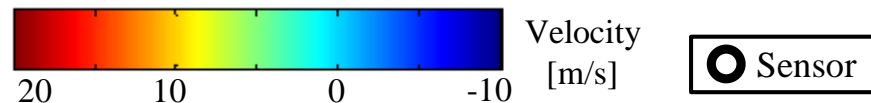
$$t_k = \mathbf{h}_i \mathbf{U}_m \mathbf{S}_m^2 \mathbf{V}_m^T \mathbf{h}_i^T$$

新しいセンサのノイズの自己相関

$$i_k = \max \frac{\left(\mathbf{s}_k \mathbf{R}_{k-1}^{-1} \mathbf{C}_{k-1} - \mathbf{u}_i \right) \mathbf{W}_{k-1}^{-1} \left(\mathbf{C}_{k-1}^T \mathbf{R}_{k-1}^{-1} \mathbf{s}_k^T - \mathbf{u}_i^T \right)}{t_k - \mathbf{s}_k \mathbf{R}_{k-1}^{-1} \mathbf{s}_k^T}$$

観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

Random 選択時の推定法の比較



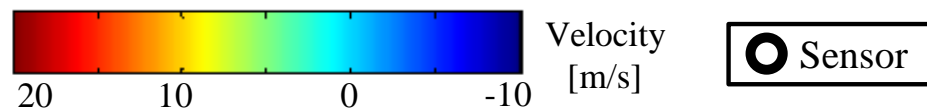
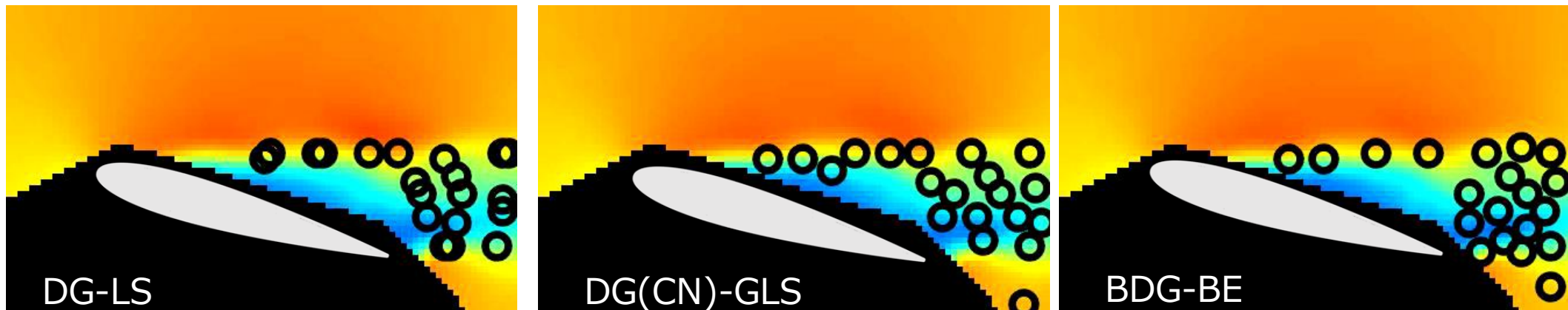
$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{y}$$

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{Q}^{-1})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}$$

- random-LS : 再構成精度が悪い (センサ位置の最適化が必要)
- random-BE : full observation と同等の再構成精度を有する

観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

センサ数：20

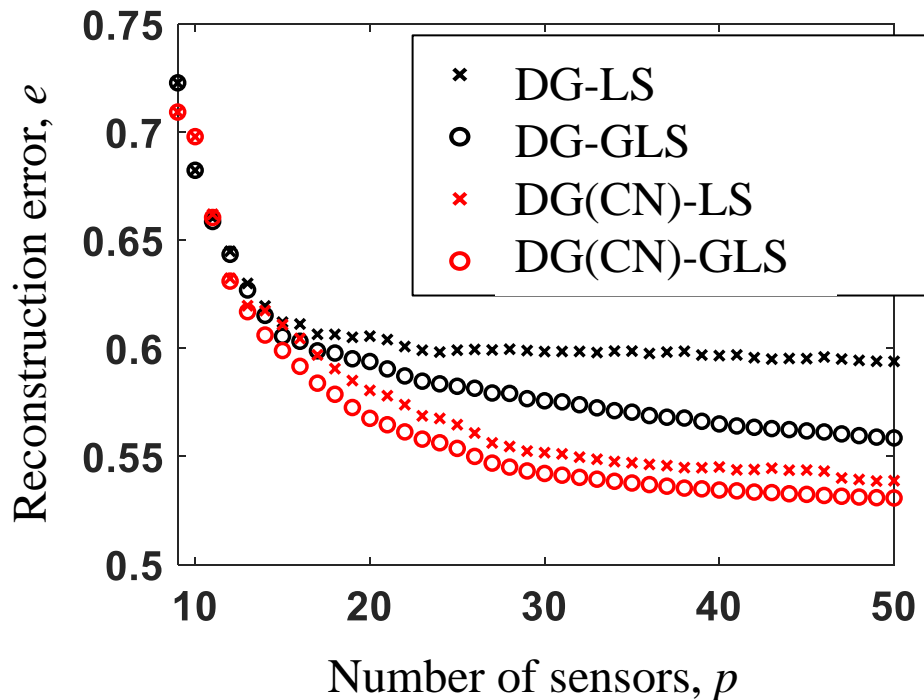


センサ位置決定に観測ノイズを考慮することで

- センサ位置の散開 (センサの密集が解消)
- 観測ノイズの少ない位置を選択

	センサ位置 決定手法		推定法
DG	$\max \det(\mathbf{C}^T \mathbf{C})$	LS	$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{y}$
DG(CN)	$\max \det(\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})$	GLS	$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}$
BDG	$\max \det(\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{Q}^{-1})$	BE	$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{Q}^{-1})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}$

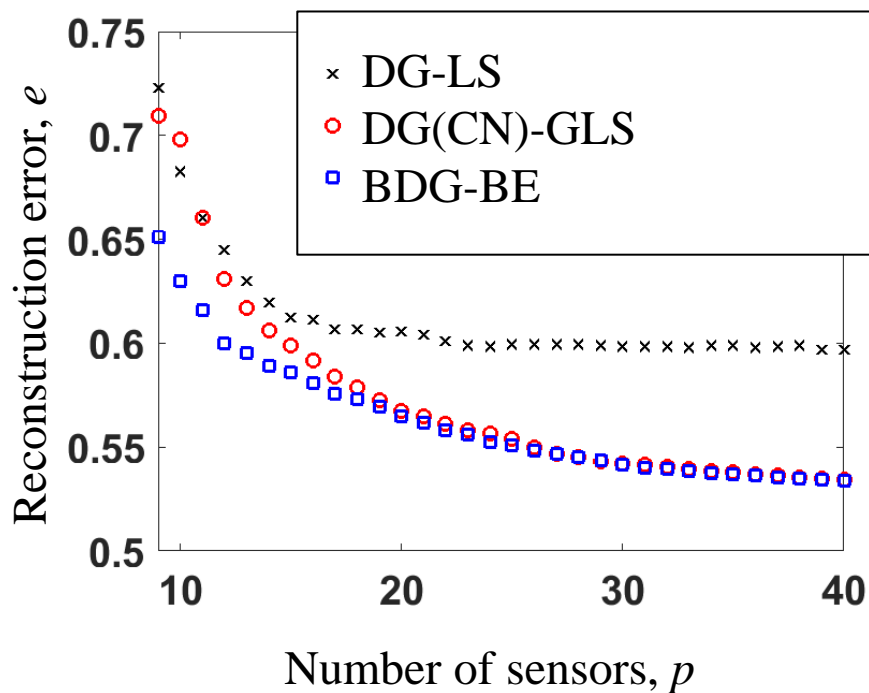
観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化



	センサ位置 決定手法		推定法
DG	$\max \det(\mathbf{C}^T \mathbf{C})$	LS	$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{y}$
DG(CN)	$\max \det(\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})$	GLS	$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}$
BDG	$\max \det(\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{Q}^{-1})$	BE	$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{Q}^{-1})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}$

- 推定に観測ノイズを考慮→測定の重みづけによる推定の向上
- センサ位置決定に観測ノイズを考慮→観測ノイズの少ない位置を選択
- 推定とセンサ位置決定に観測ノイズを考慮→効果を合わせた最良の再構成結果

観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化



	センサ位置 決定手法		推定法
DG	$\max \det(\mathbf{C}^T \mathbf{C})$	LS	$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{y}$
DG(CN)	$\max \det(\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})$	GLS	$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}$
BDG	$\max \det(\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{Q}^{-1})$	BE	$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{Q}^{-1})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}$

- センサ数が少ない領域の結果が改善→観測の不足時に正確な推定
- センサ数が多い領域の誤差低減効果は減少→観測の充実に伴い事前情報の重みが低下

目次

観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

1. 研究背景と本研究の狙い

- ビックデータとリアルタイム制御
- 低次元モデル (SVD)
- スパースセンサ位置最適化

2. データ駆動型スパースセンサ位置最適化

- センサ位置最適化と貪欲法による準最適化
- 最適実験計画法 (DG, EG, AG)
- 線形最小二乗推定を用いた場再構成 (地球海面温度, PIV)

3. 観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

- 本研究における観測ノイズ
- 観測ノイズを考慮した最適化 (DG(CN), BDG)
- 一般線形最小二乗推定とベイズ推定を用いた場再構成 (PIV)

4. ダイナミクスを考慮したスパースセンサ位置最適化

- 可観測性グラミアン
- 場再構成 (PIV)

5. 今後の発展とまとめ

- ベクトル計測への拡張
- スパースプロセッシングPIVによるリアルタイム計測

ダイナミクスを考慮したスパーセンサ位置最適化

Nankai et al., Trans. JSASS, 2019

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{z}_k = \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{z}_k + \mathbf{v}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{z}_0 + \mathbf{v}_k \end{cases}$$



$0 \leq k \leq t$ の観測 \mathbf{y}_k を連結

$$\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{\Gamma}_t \mathbf{z}_0 + \boldsymbol{\eta}_t$$

$$\begin{array}{c} \text{観測} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_t \end{array} = \begin{array}{c} \text{観測行列} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^t \\ \boldsymbol{\Gamma}_t \end{array} \times \begin{array}{c} \text{初期状態} \\ \mathbf{z}_0 \end{array} + \begin{array}{c} \text{観測ノイズ} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{array}$$

一般線形最小二乗推定

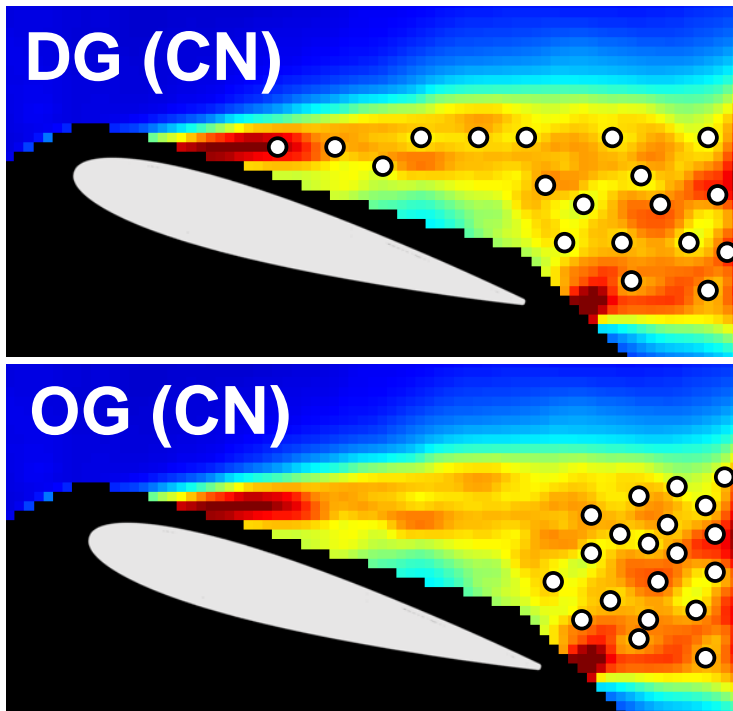
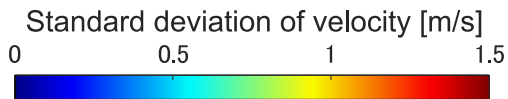
Summers et al., 2015,
DeVries and Paley, 2013

$$\hat{\mathbf{z}}_0 = (\boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\Gamma})^{-1} \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

$$\min |\mathbf{z}_0 - \hat{\mathbf{z}}_0|$$

$$\max \mathbf{W}_0 = \sum_{k=1}^t \underbrace{(\mathbf{A}^k)^T \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^k}_{\text{可観測性グラミアン}}$$

可観測性グラミアンを使った貪欲法で同様にセンサ位置決定が可能



センサ位置 決定手法	目的関数
DG(CN)	$\max \det(\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})$
OG(CN)	$\max \det\left(\sum_{k=1}^t (\mathbf{A}^k)^T \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^k\right)$

- OG(CN) / DG(CN) 同様に散らばったセンサ位置が得られた
- OG(CN)は、よりも後流領域にセンサが配置

目次

観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

1. 研究背景と本研究の狙い

- ビックデータとリアルタイム制御
- 低次元モデル (SVD)
- スパースセンサ位置最適化

2. データ駆動型スパースセンサ位置最適化

- センサ位置最適化と貪欲法による準最適化
- 最適実験計画法 (DG, EG, AG)
- 線形最小二乗推定を用いた場再構成 (地球海面温度, PIV)

3. 観測ノイズを考慮したスパースセンサ位置最適化

- 本研究における観測ノイズ
- 観測ノイズを考慮した最適化 (DG(CN), BDG)
- 一般線形最小二乗推定とベイズ推定を用いた場再構成 (PIV)

4. ダイナミクスを考慮したスパースセンサ位置最適化

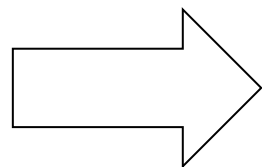
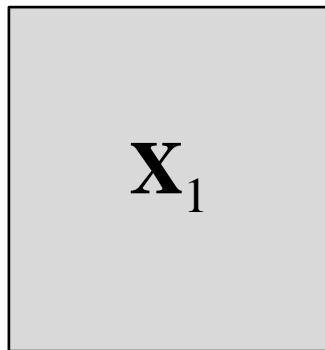
- 可観測性グラミアン
- 場再構成 (PIV)

5. 今後の発展とまとめ

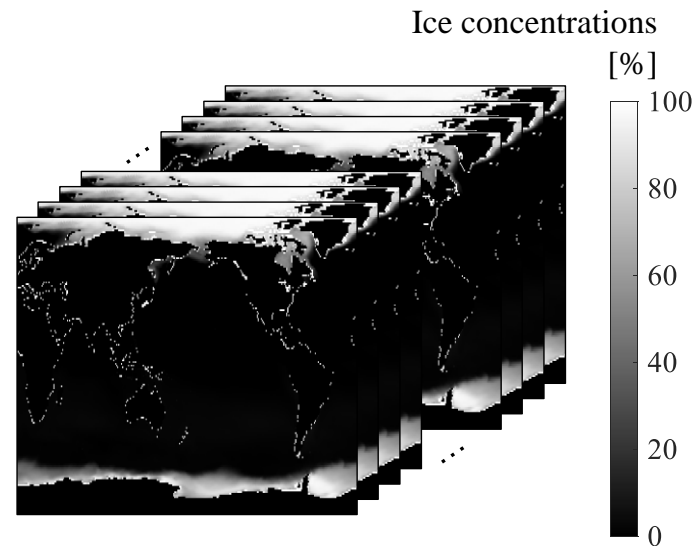
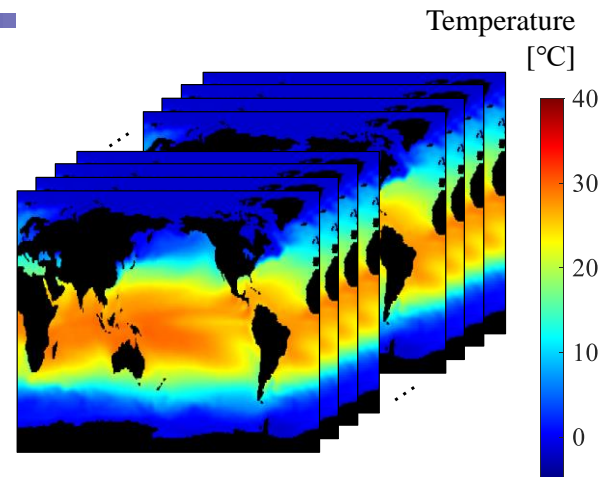
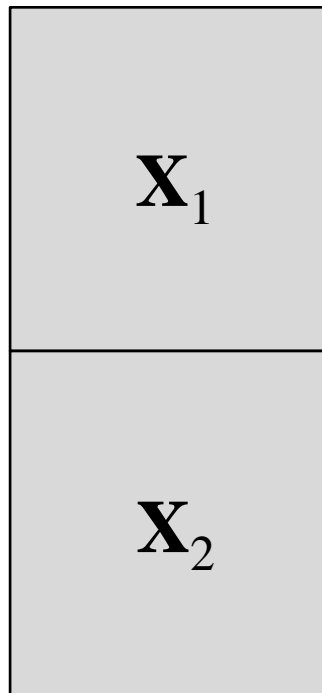
- ベクトル計測への拡張
- スパースプロセッシングPIVによるリアルタイム計測

今後の発展とまとめ -ベクトル計測への拡張

スカラー計測 (従来)

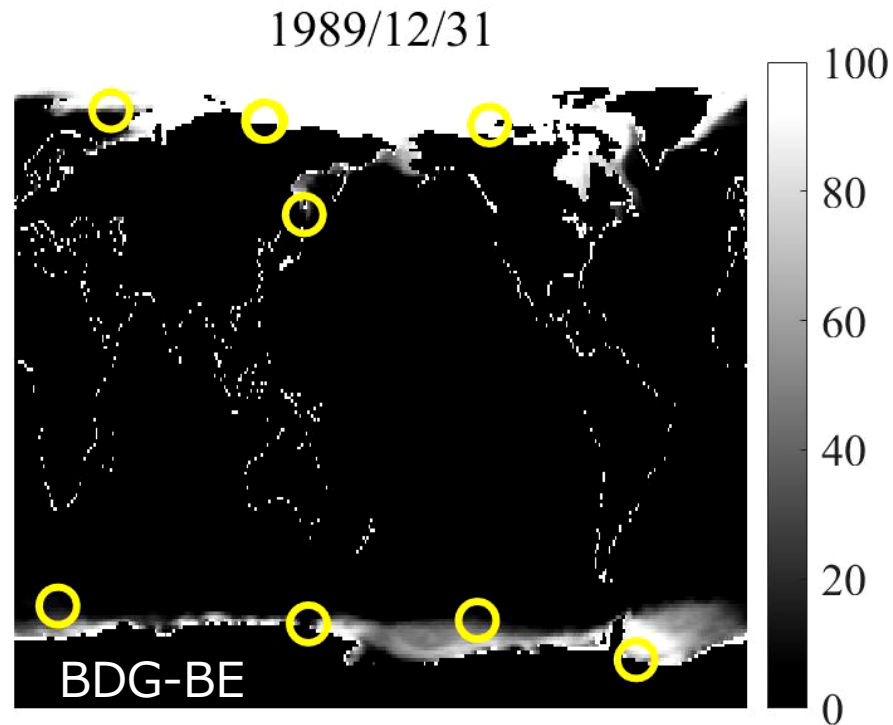
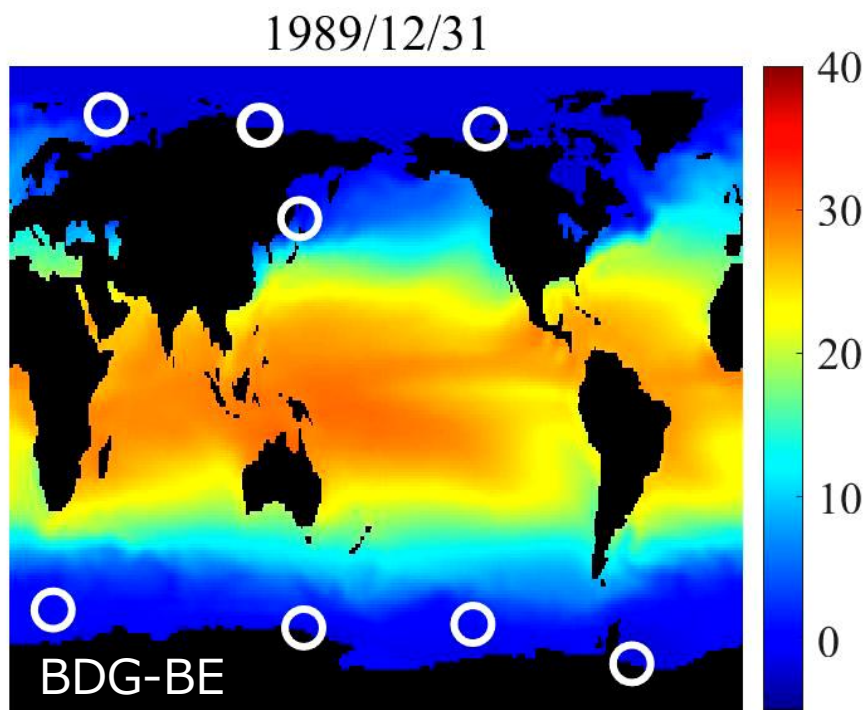


ベクトル計測



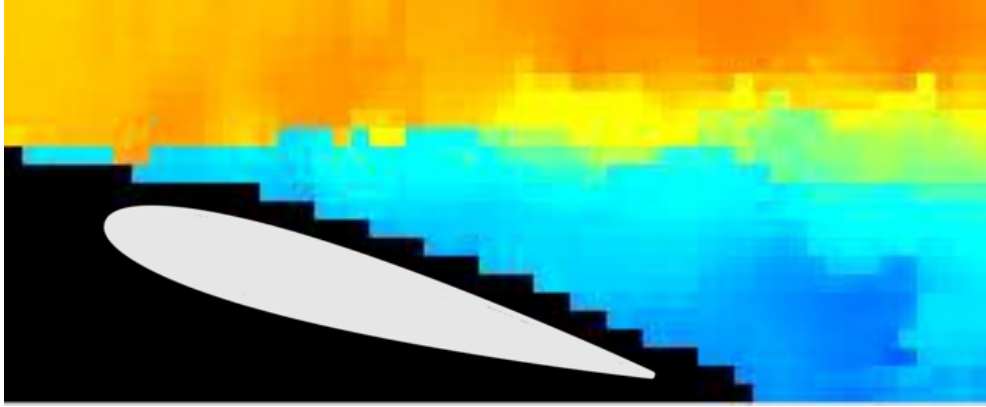
- センサ点から複数成分の計測をする問題

今後の発展とまとめ -ベクトル計測への拡張

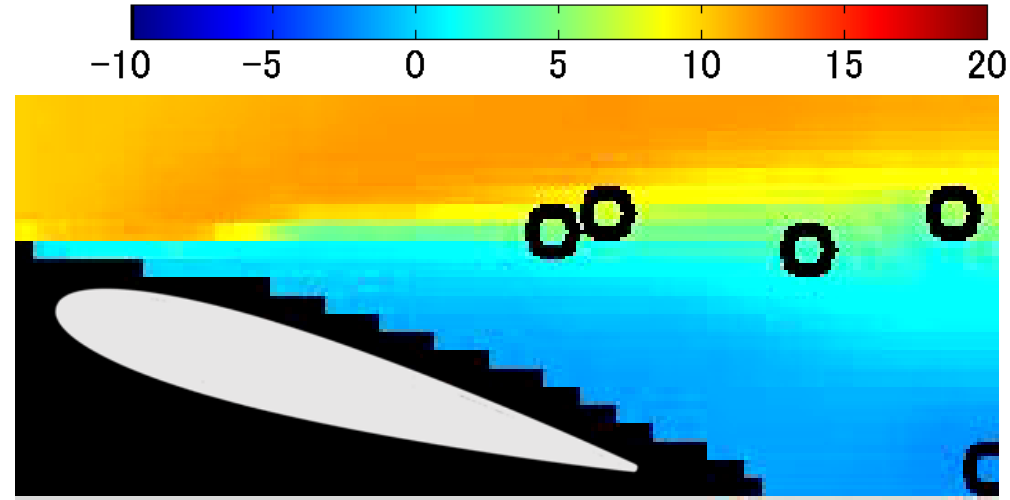


- 地球海面温度場／氷濃度場でセンサ最適化と推定に成功

Saito et al., to be submitted.



Regular PIV



Real-time SPPIV

✓ すべてのポイントで計測

✓ センサ位置最適化 (DG) : 5点

✓ サンプリングレート 2000 Hz

• SPPIV で詳細な流れ場のリアルタイム計測に成功

➤ regular PIV : $O(10^{-3})$ s/step (参考)

➤ SPPIV : $O(10^{-5})$ s/step

今後の発展とまとめ

観測ノイズに強い状態推定のためのスパースセンサ位置決定手法を開発した

- 低次元化で切り捨てられる高次モードを観測ノイズとしてモデル化した
- 状態推定とセンサ位置決定のアルゴリズムに観測ノイズを取り入れた
→ これらを組み合わせ、推定結果の改善を確認した

今後の研究内容

- ベクトル計測への拡張
- SPPIV
- コスト関数への拡張
- 低次元モデルの改良