



第2回 衝撃波現象・基礎（1）

Lecture 2: Fundamentals of Shock Wave Phenomena (1)

PDF 資料 (PW : shock2016)

<http://www.ifs.tohoku.ac.jp/shock/2016.html>



授業計画 Contents

Lecture 1	緒言・総論 Introduction
Lecture 2	衝撃波現象・基礎（1. 生成法など） Fundamental SW I
Lecture 3	衝撃波現象・基礎（2. 物理特性など） Fundamental SW II
Lecture 4	定常衝撃波現象 Steady SW
Lecture 5	非定常衝撃波現象（1. 伝播、回折など） Unsteady SW I
Lecture 6	非定常衝撃波現象（2. 反射、屈折など） Unsteady SW II
Lecture 7	数値シミュレーション CFD I
Lecture 8	数値シミュレーション CFD II
Lecture 9	液体・固体中の衝撃波現象 SW in condensed matters
Lecture 10	混相流中の衝撃波現象 SW in multiphase flows
Lecture 11	数値シミュレーション CFD III
Lecture 12	実験装置の紹介 Facilities
Lecture 13	衝撃波における流れ場の実験可視化法 Flow Visualization I
Lecture 14	衝撃波における流れ場の数値可視化法 Flow Visualization II
(Lecture 15	その他 Others) 2月上旬

Friday 8 : 50－10 : 10 + α

休講 : ---



内容 Contents

- 衝撃波の生成 (Formation of shock waves)
- 非定常等エントロピーの理論 (Theory of Unsteady Isentropic Waves)
- 衝撃波の厚さ Shock wave thickness
- 衝撃波の理論 (Theory of Shock Waves)



衝撃波の生成: 線形波動方程式

Shock Wave formation (1): Linear wave equation

線形スカラー方程式 (線形波動方程式)

D'Alembert's
solution

$u_t + c u_x = 0$ *constant, linear wave equation*
* hyperbolic eqn. (双曲型)
 $\left\{ \begin{array}{l} t=0: u=f(x) \end{array} \right.$
Solution: $u(x,t) = f\left(\frac{x-ct}{c}\right)$
Proof: $u_t = -c f_x$
 $u_x = f_x$
 $x-ct = \xi$

解は特性線と呼ばれる線に沿って一定である。

Characteristic line

線形スカラー方程式: 波の形を保つ。

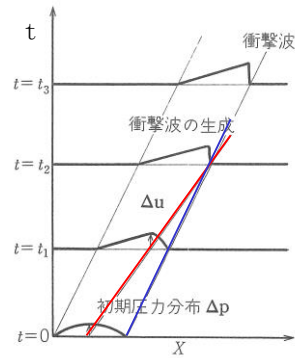


衝撃波の生成: 非線形スカラー方程式

Shock Wave formation (2): Nonlinear wave equation

非線形スカラー方程式

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ t=0, \quad u = \sin(x) \end{cases}$$



衝撃波の生成過程



衝撃波の生成: 衝撃波が形成される時間

The timing for shock wave formation

非線形スカラー方程式: 衝撃波が形成される時間の計算

$$\begin{aligned} &\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ t=0, \quad u = \sin(x) \end{cases} \\ &u_0 = \sin(x_0) \\ &u_1 = \sin(x_0 - ax) \\ &T = \frac{ax}{u_1 - u_0} = \frac{ax}{-\sin'(x) ax} = -\frac{1}{\sin'(x)} \\ &\Rightarrow T = -\frac{1}{\cos(x)} \\ &\text{SW, } T = 1 \end{aligned}$$

より詳しく知りたい方へ for more details

Linear and Nonlinear Waves (Pure and Applied Mathematics)

by [G. B. Whitham](#)

衝撃波の生成：非定常等エントロピー流

Isentropic flows before the formation of shock wave

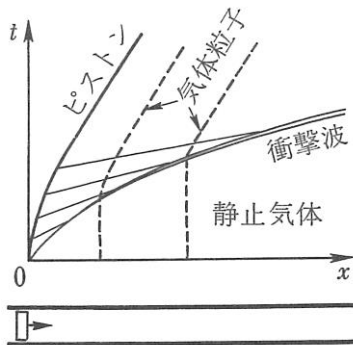
一次元等エントロピー流 (1-D isentropic flow):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\
 & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\
 & \text{Isentropic: } p \rho^{-\gamma} = \text{const.} \\
 & \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a^2 \\
 & P \equiv u + \frac{2a}{\gamma-1} \quad Q \equiv u - \frac{2a}{\gamma-1} \quad \text{-- リーマン不変量 Riemann invariant} \\
 & \frac{\partial P}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{-- } u+a: \text{前進波;} \\
 & \frac{\partial Q}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{-- } u-a: \text{後退波;} \\
 & \quad \quad \quad \text{Right/left traveling wave} \\
 & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
 \end{aligned}$$

より詳しく知りたい方→ 松尾・「圧縮性流体力学」 p. 207

衝撃波の生成：

1-D 等エントロピー流 (isentropic flow): 衝撃波の生成



前進波、Qは定数

$$\begin{aligned}
 P & \equiv u + \frac{2a}{\gamma-1} \quad Q \equiv u - \frac{2a}{\gamma-1} \\
 \frac{\partial P}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial P}{\partial x} & = 0
 \end{aligned}$$

ピストンの運動に伴う
等エントロピー流れ



衝撃波の厚さ (thickness of shock waves)

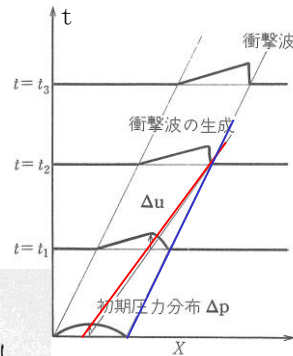
非線形スカラー方程式 → Euler 方程式

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ t=0, \quad u = \sin(x) \end{cases}$$

急峻化作用 <> 散逸作用

$$u_t + u u_x = \mu u_{xx}$$

$\mu \sim \frac{1}{Re}$



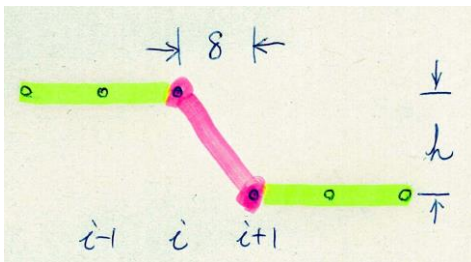
衝撃波の生成過程



衝撃波の厚さ (thickness of shock waves)

急峻化作用 <> 散逸作用

$$u_t + u u_x = \mu u_{xx}$$



$$\begin{aligned} \sim O(1) \\ u u_x &\sim \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\delta} = -\frac{h}{2\delta} \\ \mu u_{xx} &\sim \mu \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{\delta^2} = -\mu \frac{h}{\delta^2} \end{aligned}$$

$$R = \left| \frac{u u_x}{\mu u_{xx}} \right| = \left| \frac{-h/2\delta}{-\mu h/\delta^2} \right| = \frac{\delta}{2\mu}$$

$$R \gg O(1)$$

$$R \sim 1$$

$$\delta \sim \mu$$

衝撃波の厚さ (thickness of shock waves)

$$\delta \sim \mu$$

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{Re} = \frac{\mu}{\rho U L}$$

$$\delta \sim \frac{\mu}{\rho U}$$

$$\mu = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\rho = 1 \text{ kg/m}^3$$

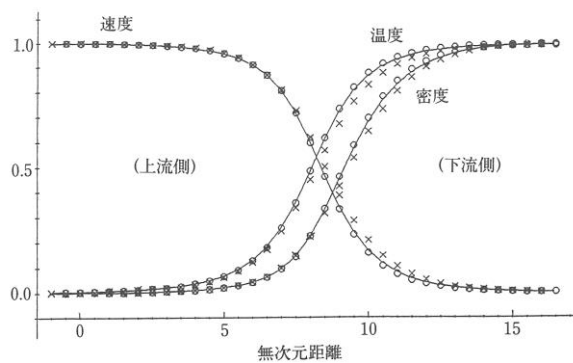
$$U = 100 \text{ m/s}$$

$$\delta \sim \frac{\mu}{\rho U} = 2 \times 10^{-7} \text{ m} = 0.2 \mu\text{m}$$

粘性係数
密度
強さ
媒体

衝撃波の厚さ (thickness of shock waves)

衝撃波の内部構造



ボルツマン方程式をモデル化した
BGKタイプ方程式の数値解

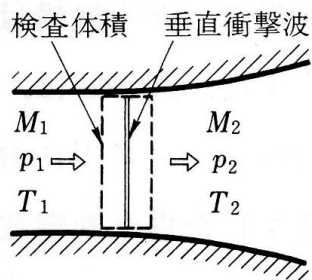
衝撃波の厚さ (thickness of shock waves in CFD)

CFD中の衝撃波の厚さ

$$\begin{array}{c} \delta \sim \mu \\ \downarrow \\ \Delta x \end{array} \Rightarrow \mu \sim \Delta x$$

格子間隔が衝撃波の厚さより大きい場合、
人工粘性係数 $\rightarrow \Delta x$

衝撃波の関係式: Rankine(1869)-Hugoniot(1887)



連続の式: $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$

運動量の式: $p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$

エネルギー式:
$$-\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2$$

上流と下流の圧力比と密度比及び温度比を関係づける式。

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1} + 1 \right) / \left(\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1} + 1}$$



衝撃波の関係式: 衝撃波マッハ数の定義

Shock Mach number

$$M_s = \frac{U_s}{a_0}$$

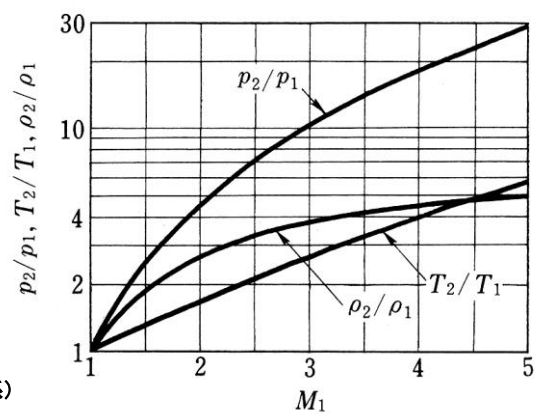


衝撃波の関係式:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} = \frac{u_1}{u_2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$



衝撃波前後の圧力比、密度比および
温度比と衝撃波マッハ数の関係
(定常流の場合: 上流マッハ数との関係)



衝撃波マッハ数・流れマッハ数 (Shock Mach Number vs. Flow Mach Number)

Shock Mach number

$$M_s = \frac{U_s}{a_0}$$

Flow Mach number

$$M = \frac{U}{a_0}$$

For a steady normal shock wave, $M_s = M$ (upstream) .



衝撃波マッハ数・流れマッハ数 (Shock Mach Number vs. Flow Mach Number)

Shock Mach number $M_s > 1$

Weak Shock Wave: $1 < M_s < 2$

Strong Shock Wave: $M_s > 5$

Flow Mach number $M > 0$

Incompressible flow: $M \ll 1$ (0.1~0.3)
Subsonic flow: $M < 1$
Transonic flow: $|M - 1| < 0.3 \sim 0.4$
Supersonic flow: $M > 1$
Hypersonic flow: $M \gg 1$ (5~8)



定常垂直衝撃波の特性 (Normal shock waves)

$$M_1 > 1 > M_2$$

For a perfect gas,

$$\frac{p_2}{p_1} > 1 \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} > 1 \quad \frac{T_2}{T_1} > 1$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} < 1 \quad \frac{T_{02}}{T_{01}} = 1$$

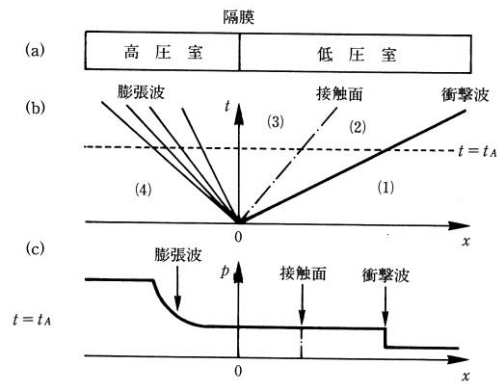


関係式の纏め Summary

- **1-D 等エントロピー流 (連続流れ場)**
前進波、後退波: リーマン不変量 (Riemann invariant)
- **衝撃波 (不連続流れ場)**
Rankine-Hugoniot関係式、衝撃波関係式



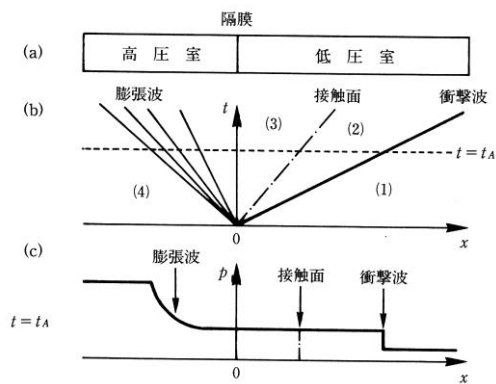
衝撃波管の理論



衝撃波管 a. 概念図 b. $x-t$ 図 c. 圧力分布図



衝撃波管の解析: Riemann問題



マッハ数、密度、圧力、速度

未知数: $(1+3+3)$ 個

関係式:

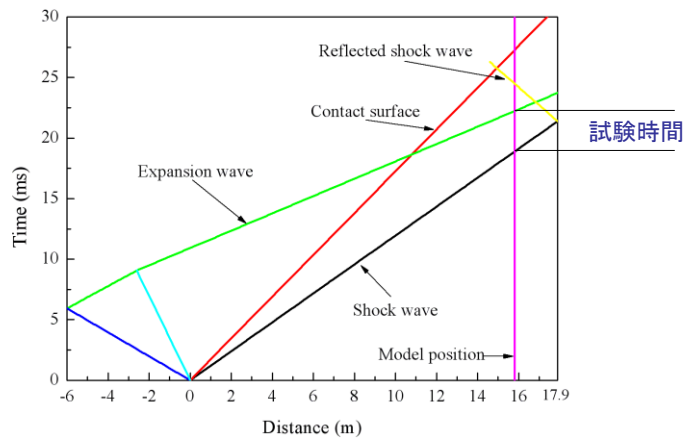
衝撃波関係式: 3

等エントロピー式: 1
後退波のリーマン不変量: 1

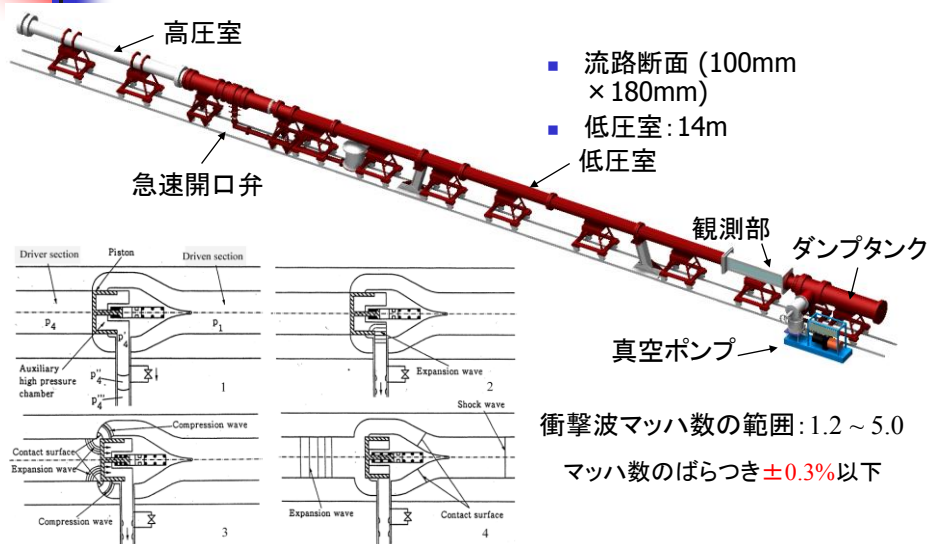
接触面: 2



試験時間: x-t線図 $M_s=2.43$

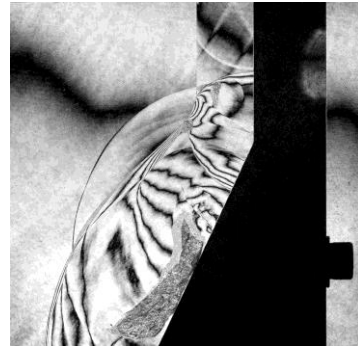
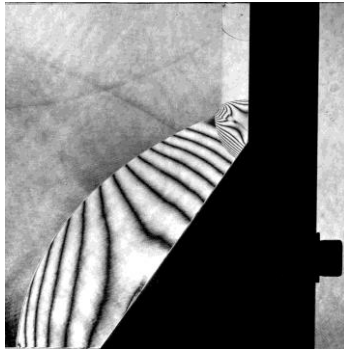


大型無隔膜衝撃波管



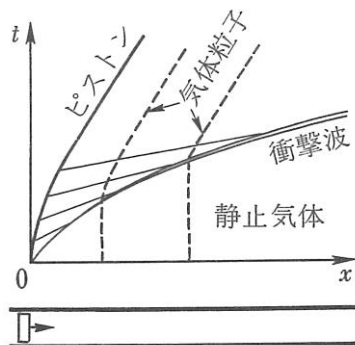


衝撃波の反射（隔膜破片の影響）



レポート問題(1)

衝撃波の生成



ピストンの運動に伴う
等エントロピー流れ

図のように、ピストンを静止状態から連続的に加速する場合、衝撃波が最初に現れる時間を求めよう。

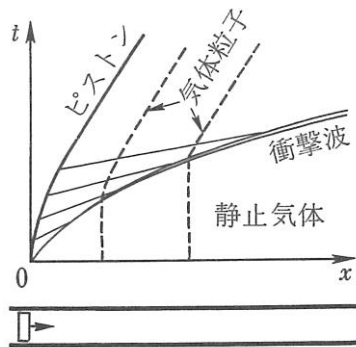
(ピストンの速度 $U = t$ と仮定する；気体は理想気体であり、静止気体の音速は a_0 とする。)

Hint: 前進波、 Q は定数

$$P \equiv u + \frac{2a}{\gamma-1} \quad Q \equiv u - \frac{2a}{\gamma-1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

Problem for Report(1)



Timing for shock wave formation

Consider a piston in a confined straight tube filled with air, as shown in the left figure. The piston is accelerated gradually. Find the timing for the shock wave formation.

(Let the velocity of piston $U = t$; the air is the ideal and calorically perfect gas; initial sound speed of the air is a_0 .)

Hint: Right travelling wave, Q is constant

$$P \equiv u + \frac{2a}{\gamma-1} \quad Q \equiv u - \frac{2a}{\gamma-1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

終わり