平成24年度医工学概論

流れの計測融合シミュレーションの理論的枠組み

2012年6月15日

東北大学
流体科学研究所
早瀬　敏幸

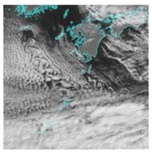
講義内容

1. はじめに

背　景

流れの実現象の再現が重要な分野

- ●気象予報



高知大学
ホームページ

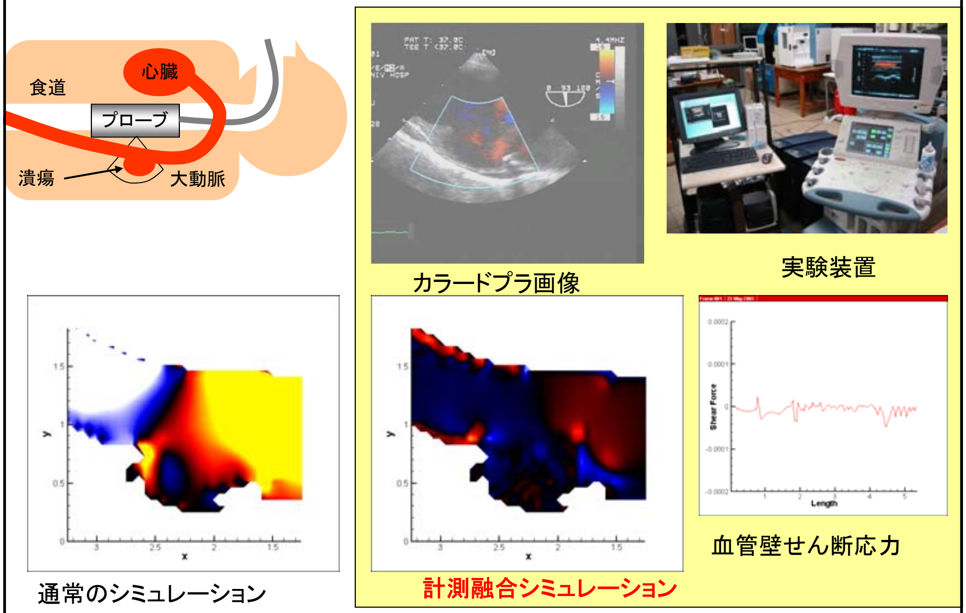
- ●流れの制御

- ●医療支援

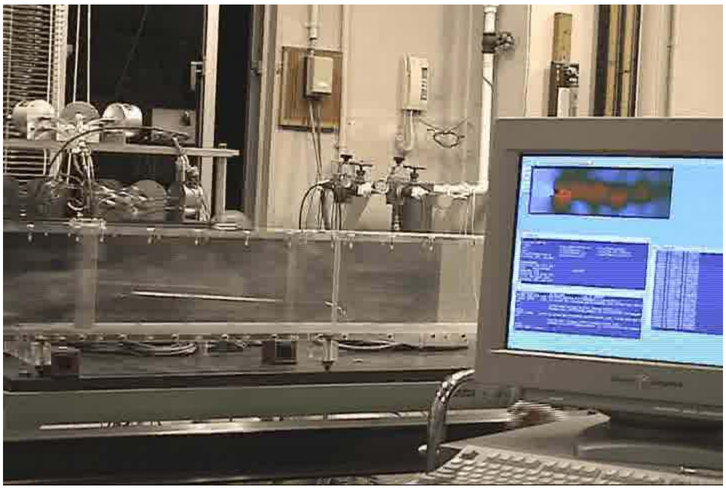
- ●大規模システムの異常同定

1940年アメリカ
Carleton
University
ホームページより

計測融合シミュレーションを応用した血流可視化診断装置



ハイブリッド風洞によるカルマン渦列のリアルタイム解析



実現象を再現するための手法

●計測

●理論解析

●数値シミュレーション

●ティホノフ正則化

B. Zeldin and A. Mead, AIAAJ. 35-11, 1997, 1787-1790.

●PTV(可視化流れ計測)とCFDの融合手法

T. Ido, Y. Murai, F. Yamamoto, Experiments in Fluids, 32, 2002, 326-336.

●4次元変分法

●オブザーバ、カルマンフィルタ、計測融合シミュレーション

●ニューラルネットワーク

2. 計測融合シミュレーションの理論的枠組み

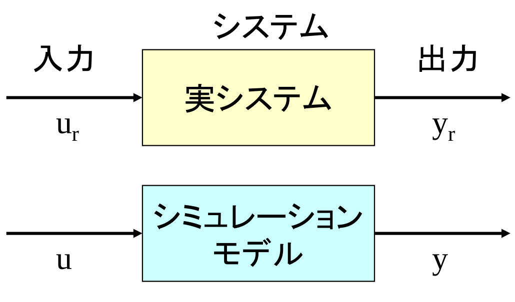
2.1 シミュレーションによる実現象の再現

2.2 順問題と逆問題

2.3 計測融合シミュレーションの定式化

2.1 シミュレーションによる実現象の再現

シミュレーションで実現象を再現するのは難しい！



ポイント： 誤差$(y - y_r)$のダイナミックスを考える

誤差ダイナミックス

簡単のため線形系で考える。状態変数 x自身を出力と考える。

実システム: $\dfrac{dx_r}{dt} = Ax_r + Bu_r$

シミュレーション: $\dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu$

誤差ダイナミクス: $\dfrac{d}{dt}(x - x_r) = A(x - x_r) + B(u - u_r)$

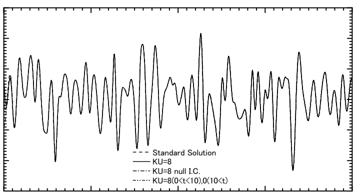
解は $x - x_r = e^{At}(x - x_r)_{t=0} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B(u - u_r) d\tau$

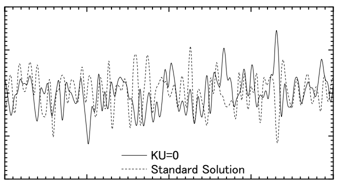
システム行列Aに不安定な固有値があると、初期条件および入力の誤差は指数関数的に増加する

誤差ダイナミックス

システム行列Aに不安定な固有値があると、初期条件および入力による誤差は指数関数的に増加する

$$x - x_r = e^{At}(x - x_r)_{t=0} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B(u - u_r) d\tau$$

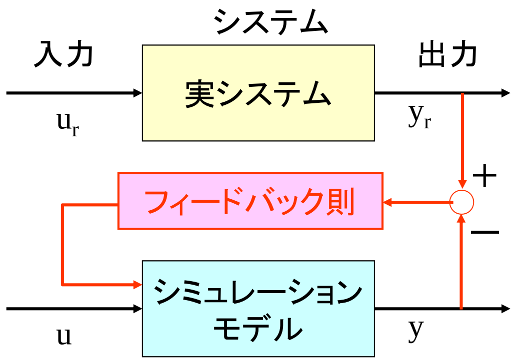




初期値は非常に近くても、時間がたつと全く異なった解になる

天気予報は難しい！

出力誤差をフィードバックすると解決できる！（オブザーバ）



ポイント： 誤差$(y - y_r)$のダイナミックスを考える

誤差ダイナミックス

実システム: $\dfrac{dx_r}{dt} = Ax_r + Bu_r$

$y = Cx,$

$y_r = Cx_r$

オブザーバ: $\dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu - K(y - y_r)$

$-)$

誤差ダイナミクス: $\dfrac{d}{dt}(x - x_r) = A(x - x_r) + B(u - u_r) - K(Cx - Cx_r)$

$$\frac{d}{dt}(x - x_r) = (A - KC)(x - x_r) + B(u - u_r)$$

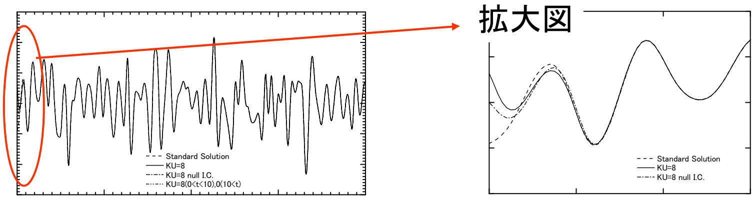
解は $x - x_r = e^{(A-KC)t}(x - x_r)_{t=0} + \int_0^t e^{(A-KC)(t-\tau)} B(u - u_r) d\tau$

フィードバックゲイン行列Kを適当に選んで、(A-KC)の固有値の実部を全て負に設定できれば、任意の初期条件から誤差は0に収束する。

誤差ダイナミックス

フィードバックゲイン行列Kを適当に選んで、(A-KC)の固有値の実部を全て負に設定できれば、任意の初期条件から誤差は0に収束する。

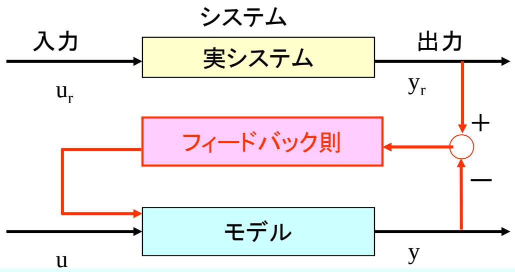
$$x - x_r = e^{(A-KC)t}(x - x_r)_{t=0} + \int_0^t e^{(A-KC)(t-\tau)} B(u - u_r)d\tau$$



異なる初期値から、正しい解に収束する

ポイント：
- ●オブザーバはフィードバックによりシミュレーションとは異なる誤差ダイナミックスをもつ。
- ●ただし、誤差の収束後はフィードバック量も0になる！

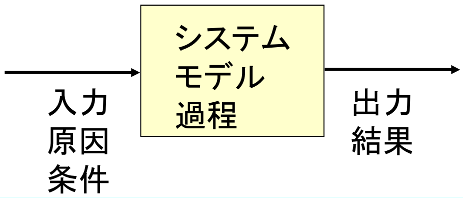
計測融合シミュレーションはオブザーバの一種



	モデル	フィードバック	
オブザーバ	線形微分方程式	極配置	Luenberger (1964)
カルマンフィルタ	線形微分方程式	最適設計	Kalman (1960)
拡張カルマンフィルタ	非線形モデル	最適設計	
計測融合シミュレーション	CFDモデル	比例制御	

2.2 順問題と逆問題

順問題と逆問題

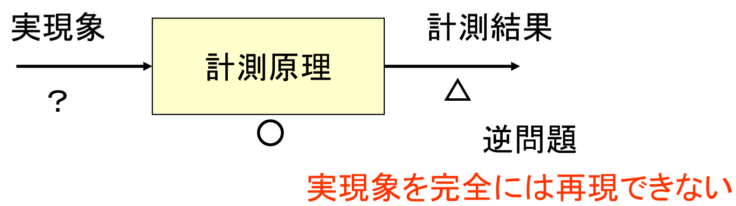


	入力	システム	出力	例
順問題	○	○	?	予測
逆問題(1)	?	○	○	制御
逆問題(2)	○	?	○	設計

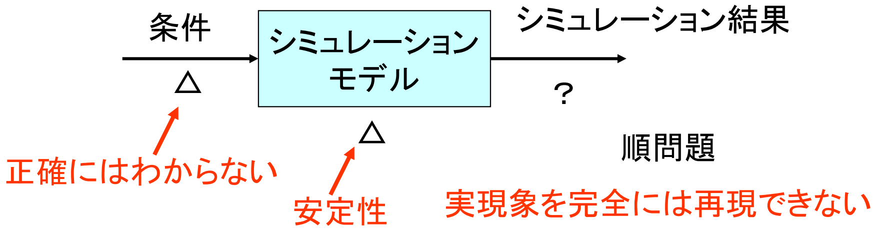
一般に、逆問題は順問題に比べて難しい
ポイント: 存在、一意性、安定性

実現象の解析手法の比較(1)

1. 計測

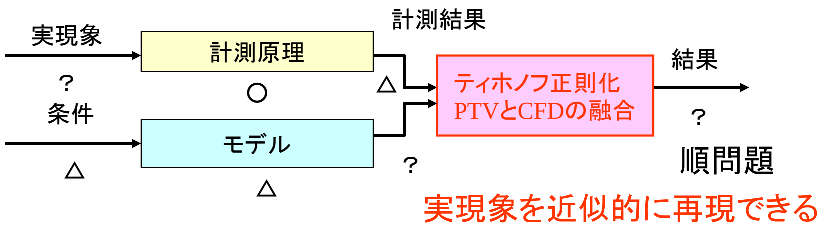


2. 数値シミュレーション



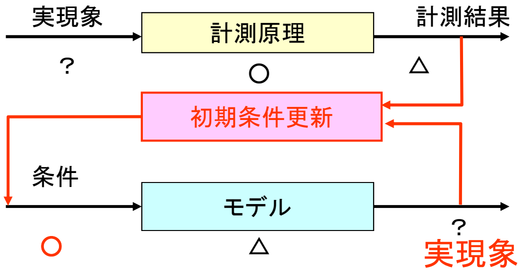
実現象の解析手法の比較(2)

3. ティホノフ正則化、PTV(可視化流れ計測)とCFDの融合手法



実現象の解析手法の比較（3）

4. 4次元変分法



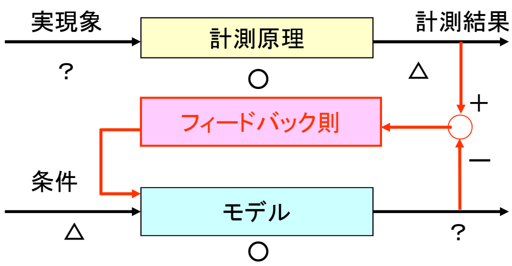
順問題

実現象を近似的に再現できる

ポイント：
- 初期条件を逐次更新している
- 誤差ダイナミックスは不変

実現象の解析手法の比較（4）

5. オブザーバ

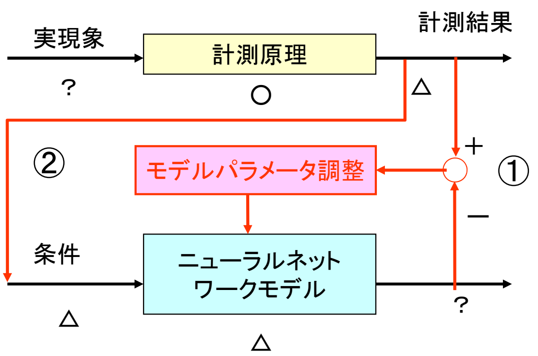


順問題

実現象を近似的に再現できる

実現象の解析手法の比較（5）

6. ニューラルネットワーク



順問題

実現象を近似的に再現できる

ポイント：ニューラルネットワークのパラメータ調整（学習）のプロセスは逆問題

2.3 計測融合シミュレーションの定式化

（速度誤差をNavier-Stokes式にフィードバックした場合）

- Navier-Stokes式に速度のフィードバックを施した定式化を行う。
- 一般の計測融合シミュレーションではNavier-Stokes式と圧力方程式それぞれに、速度誤差と圧力誤差に基づくフィードバックを行う。

1. 流れ場の基礎式(1)

非圧縮粘性流体の非定常流を対象とする

Navier-Stokes式（u:速度ベクトル、ν：動粘度、p：圧力を密度で除したもの、f：外力）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(u \cdot \nabla\right)u + \nu\Delta u - \nabla p + f \tag{1.1}$$

ここで

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{k}$$ ：ハミルトニアン

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$:ラプラシアン

連続式

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{1.2}$$

式(1.1)の発散divをとると圧力方程式が得られる

$$\Delta p = -\nabla \cdot \left\{\left(u \cdot \nabla\right)u\right\} + \nabla \cdot f \tag{1.3}$$

流れ場の基礎式(2)

初期条件（V：領域）

$$u\left(0, x\right) = u_0\left(x\right) \qquad x \in V \tag{1.4}$$

境界条件（$\partial V = \partial V_1 + \partial V_2$：境界）

$$u\left(t, x\right) = u_B\left(t, x\right) \qquad x \in \partial V_1 \tag{1.5.1}$$

$$p\left(t, x\right) = p_B\left(t, x\right) \qquad x \in \partial V_2 \tag{1.5.2}$$

(1.5.1)式は(1.1)式を用いて圧力のノイマン条件に変換される。

$$\nabla p\big|_{\partial V_1} = \left\{-\frac{\partial u}{\partial t} - \left(u_0 \cdot \nabla\right)u + \nu\Delta u + f\right\}\Bigg|_{\partial V_1} \tag{1.5.3}$$

上記の初期条件および境界条件の取扱いについては、Appendix(A.1)参照のこと。

2. 実現象

実現象の基礎式として、式(1.1)～(1.5)を再記する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(u \cdot \nabla\right)u + \nu \Delta u - \nabla p + f \qquad (2.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \qquad (2.2)$$

$$\Delta p = -\nabla \cdot \left\{\left(u \cdot \nabla\right)u\right\} + \nabla \cdot f \qquad (2.3)$$

初期条件（V：領域）

$$u\left(0, x\right) = u_0\left(x\right) \qquad x \in V \qquad (2.4)$$

境界条件（$\partial V = \partial V_1 + \partial V_2$：境界）

$$u\left(t, x\right) = u_B\left(t, x\right) \qquad x \in \partial V_1 \qquad (2.5.1)$$

$$p\left(t, x\right) = p_B\left(t, x\right) \qquad x \in \partial V_2 \qquad (2.5.2)$$

$$\nabla p\Big|_{\partial V_1} = \left\{-\frac{\partial u}{\partial t} - \left(u \cdot \nabla\right)u + \nu \Delta u + f\right\}\Bigg|_{\partial V_1} \qquad (2.5.3)$$

2. 実現象(2)

式(2.1)～(2.3)を以下のように簡略化する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(u\right) - \nabla p + f \qquad (2.6)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \qquad (2.7)$$

$$\Delta p = q\left(u\right) + \nabla \cdot f \qquad (2.8)$$

ここで、

$$g\left(u\right) = -\left(u \cdot \nabla\right)u + \nu \Delta u \qquad (2.9.1)$$

$$q\left(u\right) = -\nabla \cdot \left\{\left(u \cdot \nabla\right)u\right\} \qquad (2.9.2)$$

3. 数値シミュレーション

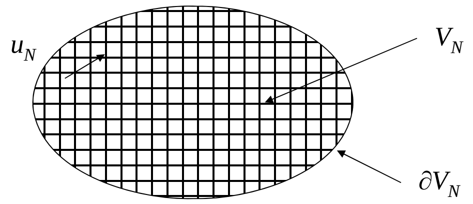
領域Vおよび境界を離散化する。

V+∂V上の$u(t,x)$に対応する、3N次元ベクトルをu_Nとする。

V, ∂Vの離散点からなる集合をV_N, ∂V_Nとする。

$V_N + \partial V_N$の部分集合Mの値からなるu_Nの部分ベクトルをu'_{NM}とする。

（N：格子点数）



3. 数値シミュレーション(2)

式(2.6)～(2.9)に対応するモデルを次式(3.1)～(3.4)で表す。

$$\frac{du_N}{dt} = g_N(u_N) - \nabla_N p_N + f_N \tag{3.1}$$

$$\nabla_N^T u_N = 0 \tag{3.2}$$

$$\Delta_N p_N = q_N(u_N) + \nabla_N^T f_N \tag{3.3}$$

ここで

$$g_N(u_N) = -(u \cdot \nabla)_N u_N + \nu \Delta_N u_N \tag{3.4.1}$$

$$q_N(u_N) = -\nabla_N^T (u \cdot \nabla)_N u_N \tag{3.4.2}$$

∇_N、Δ_Nはそれぞれ∇、Δの離散表現の3N×N，N×N次行列であり、離散化の方法（中心差分、高次風上差分、…等）により異なった形式となる。

3. 数値シミュレーション(3)

初期条件

$$u_N(0) = u_{N0} \tag{3.5}$$

境界条件

$$u'_{N\partial V_{1N}}(t) = u_{BN}(t) \tag{3.6.1}$$

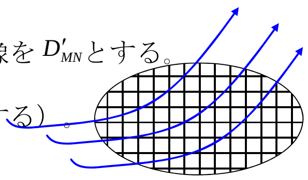
$$p'_{N\partial V_{2N}}(t) = p_{BN}(t) \tag{3.6.2}$$

$$\nabla_N p_N \big|_{\partial V_{N1}} = \left\{ -\frac{\partial u'_N}{\partial t} - (u \cdot \nabla)_N u_N + \nu \Delta_N u_N + f_N \right\} \bigg|_{\partial V_{1N}} \tag{3.6.3}$$

式(3.1)～(3.3)には上記の境界条件が適切に組み込まれているものとする。

4. 実現象の離散化

実現象から、3． で定義されたN個の格子点上での値を抽出する写像をD_Nとする。
（理想的な計測と考えられる）
また、部分集合M内の離散点の値を抽出する写像を D'_{MN}とする。



式(2.6)～(2.8)にD_Nを作用させる（外力fは０とする）。

$$\frac{d}{dt} D_N(u) = D_N(g(u)) - D_N(\nabla p) \tag{4.1}$$

$$D_N(\nabla \cdot u) = 0 \tag{4.2}$$

$$D_N(\Delta p) = D_N(q(u)) \tag{4.3}$$

4. 実現象の離散化(2)

初期条件

$$D_N\left(u\left(0,x\right)\right)=D_N\left(u_0(x)\right) \tag{4.4}$$

境界条件

$$D'_{N\partial V_1}\left(u\left(t,x\right)\Big|_{\partial V_1}\right)=D'_{N\partial V_1}\left(u_B\left(t,x\right)\right) \tag{4.5.1}$$

$$D'_{N\partial V_1}\left(p\left(t,x\right)\Big|_{\partial V_1}\right)=D'_{N\partial V_1}\left(p_B\left(t,x\right)\right) \tag{4.5.2}$$

$$D'_{N\partial V_1}\left(\nabla p\Big|_{\partial V_{N1}}\right)=D'_{N\partial V_1}\left(\left\{-\frac{\partial u}{\partial t}-\left(u\cdot\nabla\right)u+\nu\Delta u\right\}\Big|_{\partial V_{1N}}\right) \tag{4.5.3}$$

5. 理想的シミュレーション

今後の解析の準備として、「理想的シミュレーション」を次のように定義する。

【定義】
数値シミュレーションの初期条件および境界条件が実現象の値と一致し、さらに実現象の格子点上の値がシミュレーションの解となる場合に、理想的シミュレーションと呼ぶ

この定義より、理想的シミュレーションでは実現象の格子点の値（$D_N(u)$ 等）を数値シミュレーションのモデル、式(3.1)〜(3.3)のu_Nの部分に代入した式が成立する。

$$\frac{d\left(D_N\left(u\right)\right)}{dt}=g_N\left(D_N\left(u\right)\right)-\nabla_N\left(D_N\left(p\right)\right) \tag{5.1}$$

$$\nabla_N^T D_N\left(u\right)=0 \tag{5.2}$$

$$\Delta_N D_N\left(p\right)=q_N\left(D_N\left(u\right)\right) \tag{5.3}$$

5. 理想的シミュレーション(2)

式(5.1)と式(4.1)の左辺がそれぞれ等しいので

$$g_N\left(D_N\left(u\right)\right)-\nabla_N\left(D_N\left(p\right)\right)=D_N\left(g\left(u\right)\right)-D_N\left(\nabla p\right) \tag{5.4}$$

初期条件

$$u_N\left(0\right)=D_N\left(u\left(0,x\right)\right) \tag{5.5.1}$$

または

$$u_N\left(0\right)=D_N\left(u_0(x)\right) \tag{5.5.2}$$

境界条件

$$u'_{N\partial V_{1N}}\left(t\right)=D_{N\partial V_1}\left(u\left(t,x\right)\Big|_{\partial V_1}\right) \tag{5.6.1}$$

$$p'_{N\partial V_{2N}}\left(t\right)=D_{N\partial V_2}\left(p\left(t,x\right)\Big|_{\partial V_2}\right) \tag{5.6.2}$$

$$\nabla_N D_N\left(p\right)\Big|_{\partial V_{N1}}=\left\{-\frac{\partial D'_{N\partial V_1}\left(u\left(t\right)\right)}{\partial t}-D_N\left(\left(u\cdot\nabla\right)u\right)+\nu\left(D_N\left(\Delta u\right)\right)\right\}\Bigg|_{\partial V_{1N}} \tag{5.6.3}$$

6. 計測融合シミュレーション

数値シミュレーションのNavier-Stokes式の離散化式にフィードバックを加える。

$$\frac{du_N}{dt}=g_N\left(u_N\right)-\nabla_N p_N-\underline{K_u\left(u_M-u_{Mm}\right)} \tag{6.1}$$

ここで、右辺第3項は速度ベクトルに関する関するフィードバック

K_u：$N\times M$ゲイン行列

$u_M = Cu_N$　　　　（計算値）　　(6.2.1)

$u_{Mm} = CD_N(u) + \varepsilon_u$　　（計測値）　　(6.2.2)

C：$M\times N$行列（計測可能な要素は1，その他の要素は0）

ε_u：計測誤差

式(6.2)を式(6.1)に代入して，

$$\frac{\partial u_N}{\partial t}=g_N\left(u_N\right)-\nabla_N p_N-K_u C\left(u_N-D_N\left(u\right)\right)+K_u\varepsilon_u \tag{6.3}$$

6. 計測融合シミュレーション(2)

計測融合シミュレーションと実現象の差より誤差ダイナミックス（式(6.3)－式(4.1)）を求める。

$$\frac{d}{dt}\left(u_N - D_N\left(u\right)\right) = g_N\left(u_N\right) - D_N\left(g\left(u\right)\right) - \nabla_N p_N + D_N\left(\nabla p\right)$$
$$- K_u C\left(u_N - D_N\left(u\right)\right) + K_u \cdot \varepsilon_u$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(u_N - D_N\left(u\right)\right) &= g_N\left(u_N\right) - \underline{g_N\left(D_N\left(u\right)\right)} + \underline{\underline{g_N\left(D_N\left(u\right)\right) - D_N\left(g\left(u\right)\right)}} \\ &\quad - \nabla_N p_N + \underline{\nabla_N\left(D_N\left(p\right)\right)} - \underline{\underline{\nabla_N\left(D_N\left(p\right)\right) + D_N\left(\nabla p\right)}} \\ &\quad - K_u C\left(u_N - D_N\left(u\right)\right) + K_u \varepsilon_u\end{aligned} \tag{6.4}$$

理想的シミュレーションでは,式(5.4)より二重下線部が０となる点に注意する。

下線部をTaylor展開し、２次以上の高次項を無視すると、

6. 計測融合シミュレーション（３）

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(u_N - D_N\left(u\right)\right) &= g_N\left(u_N\right) - \left\{ g_N\left(u_N\right) + \left.\frac{dg_N}{du_N}\right|_{u_N}\left(D_N\left(u\right) - u_N\right)\right\} \\ &\quad + g_N\left(D_N\left(u\right)\right) - D_N\left(g\left(u\right)\right) \\ &\quad - \nabla_N p_N + \left\{\nabla_N p_N - \nabla_N\left(D_N\left(p\right) - p_N\right)\right\} \\ &\quad - \nabla_N\left(D_N\left(p\right)\right) - D_N\left(\nabla p\right) \\ &\quad - K_u C\left(u_N - D_N\left(u\right)\right) + K_u \varepsilon_u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(u_N - D_N\left(u\right)\right) &= \left\{\left.\frac{dg_N}{du_N}\right|_{u_N}\left(u_N - D_N\left(u\right)\right)\right\} - K_u C\left(u_N - D_N\left(u\right)\right) \\ &\quad - \left\{\nabla_N\left(p_N - D_N\left(p\right)\right)\right\} \\ &\quad + g_N\left(D_N\left(u\right)\right) - D_N\left(g\left(u\right)\right) - \nabla_N\left(D_N\left(p\right)\right) + D_N\left(\nabla p\right) \\ &\quad + K_u \varepsilon_u\end{aligned}$$

6. 計測融合シミュレーション（４）

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(u_N - D_N\left(u\right)\right) &= \left(\left.\frac{dg_N}{du_N}\right|_{u_N} - K_u C\right)\left(u_N - D_N\left(u\right)\right) \\
&\quad - \nabla_N\left(p_N - D_N\left(p\right)\right) \\
&\quad + g_N\left(D_N\left(u\right)\right) - D_N\left(g\left(u\right)\right) - \nabla_N\left(D_N\left(p\right)\right) + D_N\left(\nabla p\right) \\
&\quad + K_u \varepsilon_u
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

6. 計測融合シミュレーション（５）

以下では圧力方程式(3.3)を考える。

$$
\Delta_N p_N = q_N\left(u_N\right) + \nabla_N^T f_N \tag{6.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta_N p_N - \Delta_N D_N\left(p\right) + \Delta_N D_N\left(p\right) \\
&\quad = q_N\left(u_N\right) - \underline{q_N\left(D_N\left(u\right)\right)} + q_N\left(D_N\left(u\right)\right) + \nabla_N^T f_N
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

下線___部をTaylor展開し、２次以上の高次項を無視すると、

6. 計測融合シミュレーション（６）

$$\Delta_N\left(p_N - D_N(p)\right) + \Delta_N D_N(p)$$
$$= q_N(u_N) - \left\{ q_N(u_N) + \left.\frac{dq_N}{du_N}\right|_{u_N} \left(D_N(u) - u_N\right) \right\} + q_N\left(D_N(u)\right) + \nabla_N^T f_N$$

$$\Delta_N\left(p_N - D_N(p)\right)$$
$$= \left\{ \left.\frac{dq_N}{du_N}\right|_{u_N} \left(u_N - D_N(u)\right) \right\} + \underline{\underline{q_N\left(D_N(u)\right) - \Delta_N D_N(p)}} + \nabla_N^T f_N \qquad (6.8)$$

理想的シミュレーションでは,式(5.4)より下線_部が０となる点に注意する。
Δ_Nは正則なので逆行列を左から掛けると次式となる。

6. 計測融合シミュレーション（７）

$$p_N - D_N(p) = \Delta_N{}^{-1}((dq_N / du_N|_{u_N})(u_N - D_N(u))$$
$$+ q_N(D_N(u)) - \Delta_N D_N(p) + \nabla_N^T f_N) \qquad (6.9)$$

式(6.9)を式(6.5)に代入すると、

$$\frac{d}{dt}\left(u_N - D_N(u)\right) = \left(\left.\frac{dg_N}{du_N}\right|_{u_N} - K_u C \right)\left(u_N - D_N(u)\right)$$
$$-\nabla_N \Delta_N{}^{-1} \left(\left.\frac{dq_N}{du_N}\right|_{u_N} \right)\left(u_N - D_N(u)\right)$$
$$-\nabla_N \Delta_N{}^{-1} \left\{ q_N\left(D_N(u)\right) - \Delta_N D_N(p) + \nabla_N^T f_N \right\}$$
$$+ g_N\left(D_N(u)\right) - D_N\left(g(u)\right) - \nabla_N\left(D_N(p)\right) + D_N(\nabla p)$$
$$+ K_u \varepsilon_u$$

6. 計測融合シミュレーション（８）

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(u_N - D_N\left(u\right)\right) = &\left(\left.\frac{dg_N}{du_N}\right|_{u_N} - K_u C - \nabla_N \Delta_N^{-1}\left.\frac{dq_N}{du_N}\right|_{u_N}\right)\times\left(u_N - D_N\left(u\right)\right) \\
&-\nabla_N \Delta_N^{-1}\left\{\underline{\underline{q_N\left(D_N\left(u\right)\right) - \Delta_N D_N\left(p\right) + \nabla_N^T f_N}}\right\} \\
&+\underline{\underline{g_N\left(D_N\left(u\right)\right) - D_N\left(g\left(u\right)\right) - \nabla_N\left(D_N\left(p\right)\right) + D_N\left(\nabla p\right)}} \\
&+K_u \varepsilon_u
\end{aligned}
\qquad (6.10)
$$

式(6.10)が、計測融合シミュレーション式(6.1),(6.7)における、速度誤差 $(u_N - D_N(u))$の漸近挙動を記述する近似式である。

圧力誤差$(p_N - D_N(p))$の漸近挙動については、式(6.9)で与えられている。

$$
\begin{aligned}
p_N - D_N(p) = &\Delta_N^{-1}((dq_N / du_N|_{u_N})(u_N - D_N(u)) \\
&+q_N(D_N(u)) - \Delta_N D_N(p)) + \nabla_N^T f_N
\end{aligned}
$$

Appendix 境界条件

（１） Navier-Stokes式

Navier-Stokes式(1.1)は、放物型であるので、初期値問題及び初期値境界値問題について適正である。

（２） 圧力方程式

圧力方程式(1.3)は、楕円型であり、境界値問題に対して適正である。境界条件式(1.5)の式(1.5.1)を圧力の条件に変換する。

境界条件式(1.5.1)より、∂V_1上の$\partial u/\partial t$が任意の時刻で与えられるので、式(1.1)より

$$
\nabla p\Big|_{\partial V_1} = \left\{-\frac{\partial u}{\partial t} - \left(u \cdot \nabla\right)u + \nu\Delta u + f\right\}\Bigg|_{\partial V_1} \qquad (a.1.1)
$$

上式は、圧力方程式(1.3)のノイマン条件を与える。

したがって、境界条件(a.1.1),(1.5.2)により圧力方程式は解ける。

（３） 定常Navier-Stokes式(補足)

定常Navier-Stokes式は、楕円型となり、境界条件が必要となる。

３．計測融合シミュレーションによる血流解析

内容

3.1　はじめに

3.2　超音波計測融合シミュレーション

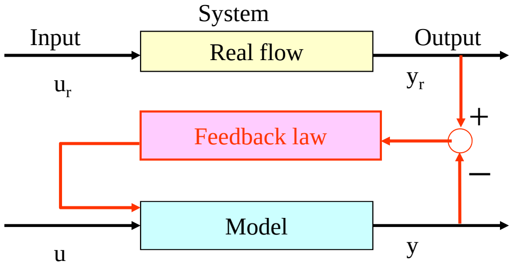
3.3　MR計測融合シミュレーション

3.4　解析結果のデモ

3.5　おわりに

3.1. はじめに

計測融合シミュレーションの構造



	モデル	フィードバック設計	
オブザーバ	線形微分方程式	極配置	**Luenberger (1964)**
カルマンフィルタ	線形微分方程式	最適設計	**Kalman (1960)**
計測融合シミュレーション	**CFD モデル**	試行錯誤	

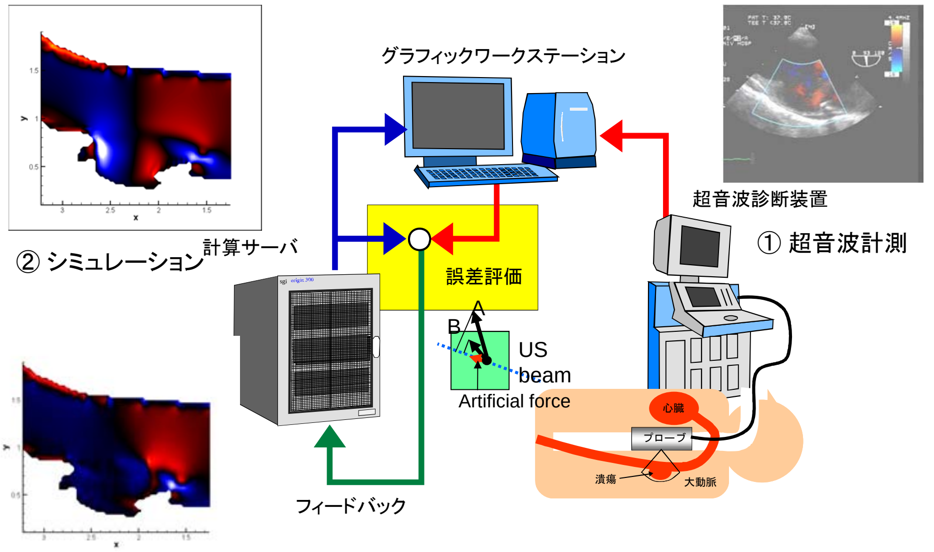
画像診断機器の特徴

	長所	短所
X線診断装置	・空間分解能、時間分解能が最も高い(0.2 mm、33 ms)	・放射線被曝
超音波診断装置	・空間分解能(体表面)、時間分解能が高い ・生体に悪影響を与えない ・血管形状と血流速の測定が可能	・コントラストが低い ・空気や骨の界面の後ろは観察できない
CT	・3次元データが得られる ・コントラストがX線診断装置より高い	・放射線被曝
MRI	・3次元データが得られる ・軟部組織のコントラストが高い ・速度分布の計測が可能(PCMRI) ・骨の陰影がない	・空間分解能、時間分解能は比較的低い ・高額

血管内の圧力分布や壁せん断応力の正確な計測は困難

3.2 超音波計測融合シミュレーション

超音波計測融合シミュレーションシステム

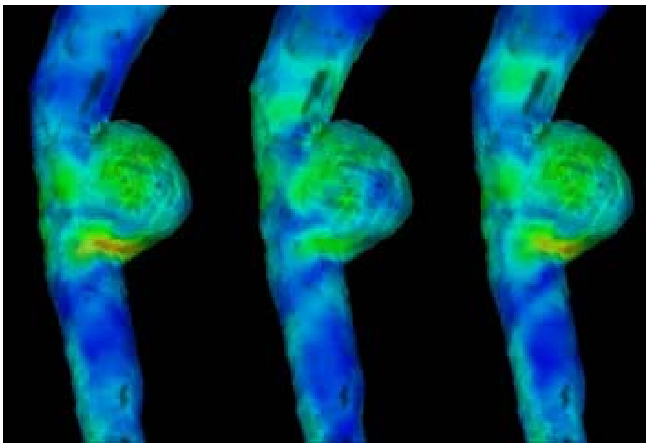


③ UMI シミュレーション

超音波計測によるビーム方向の速度（ドプラ速度）の誤差をフィードバック

51

数値実験による有効性の検証

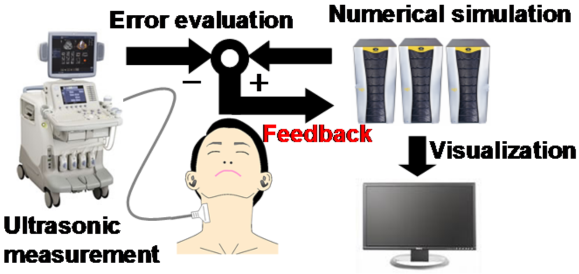


(a) 基準解　(b) 通常のシミュレーション　(c) UMI シミュレーション

血管壁せん断応力の比較

52

頸動脈内血流の２D解析（臨床応用）



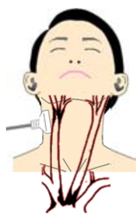
臨床用2D超音波計測融合 (UMI) シミュレーションシステム

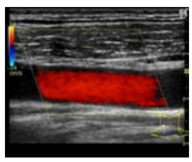
53

緒言

頸動脈

- 動脈硬化の好発部位
- 超音波診断
- 内中膜厚さ (IMT)
  → 動脈硬化の診断
  → 予測パラメータ？





2D-UMI シミュレーションシステム

- 超音波診断装置
- 2D血流解析

目的

- 動脈硬化の予測パラメータ

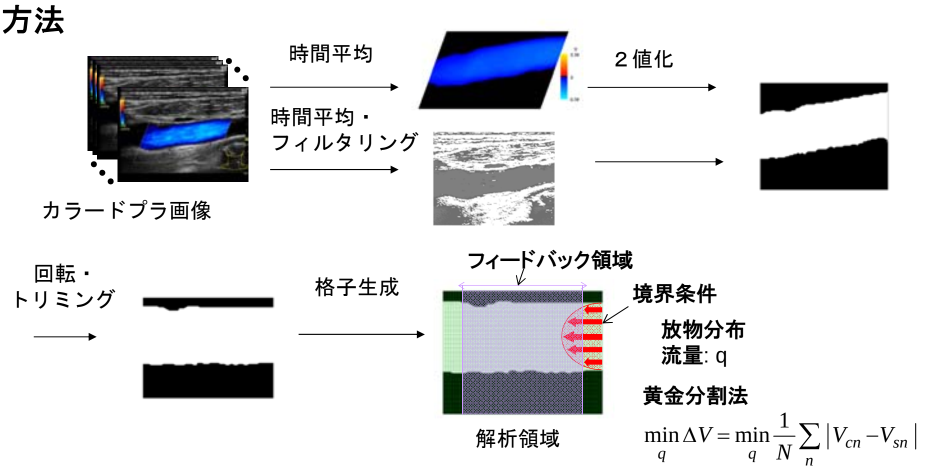
54

2D UMI シミュレーションシステム

構成

- 超音波診断装置(LOGIC 7, GE)
- 計算サーバ (Altix ,SGI)

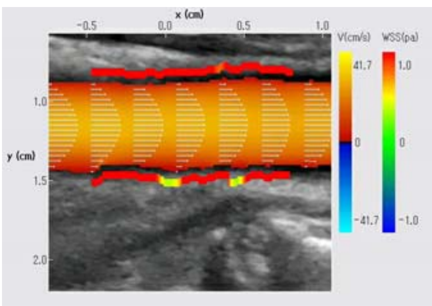
方法



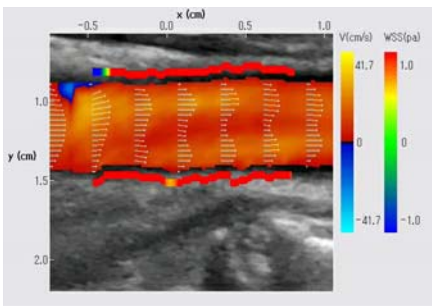
$$\min_q \Delta V = \min_q \frac{1}{N} \sum_n |V_{cn} - V_{sn}|$$

結果

フィードバックの効果



通常のシミュレーション
e = 6.7%

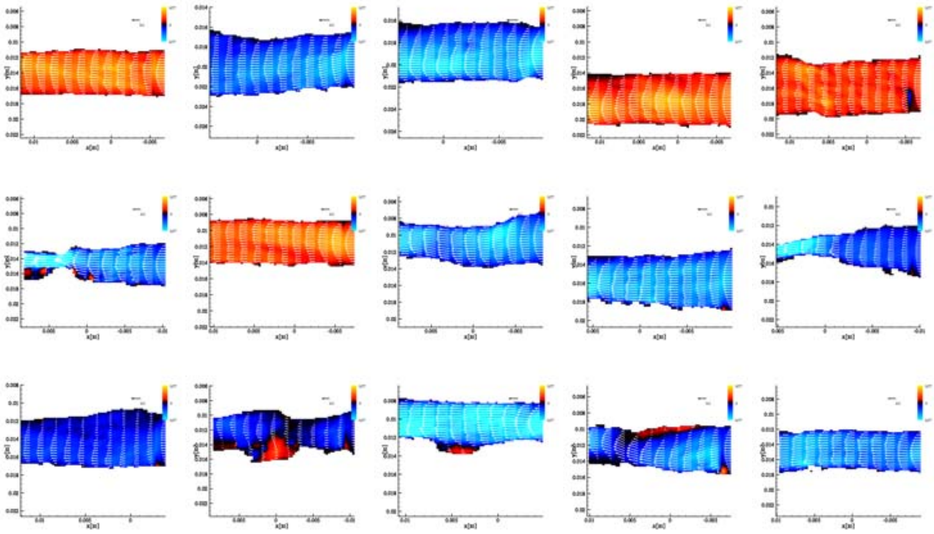


UMI シミュレーション (K^*_v=100)
e = 2.5%

結果

臨床データの解析

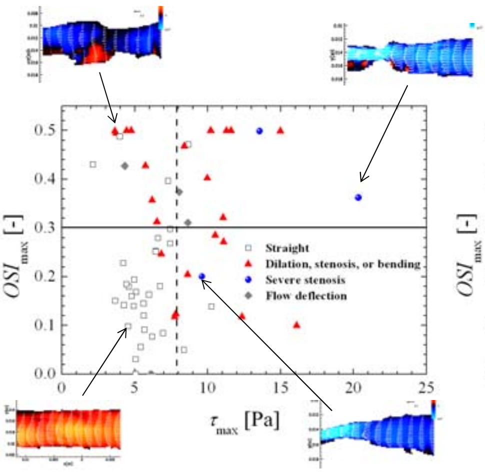
13名, 73 例



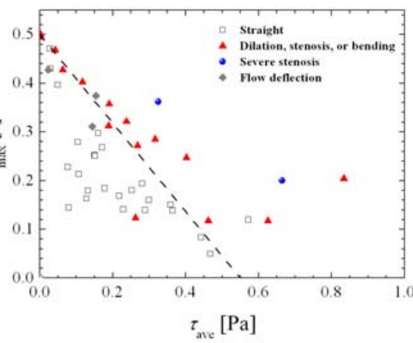
57

結果

血行力学パラメータ



OSIの最大値と壁せん断応力の最大値



OSIの最大値と壁せん断応力の平均値

58

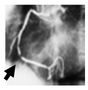
小動物用超音波計測連成血流解析システムの開発

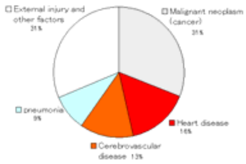
背景

循環器系疾患

・死亡原因の1/3

・疾患と血流の関係





生体内の血流情報

・医用画像診断装置（CT、MRI、超音波・・・）

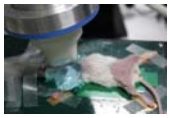
・数値シミュレーション

・超音波計測融合シミュレーション

小動物用超音波計測連成血流解析システム

目的

小動物用超音波計測連成血流解析システム

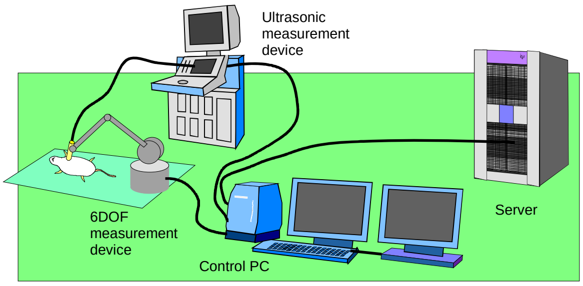


・マウス頸動脈を対象

・通常のシミュレーションと比較による有効性の検証

59

小動物用超音波計測連成血流解析システム



解析の流れ

１．血管断面の超音波Bモード計測（血管軸方向にスイープ）

２．超音波カラードプラ計測（プローブ固定）

３．Bモード計測画像より3次元血管形状抽出、計算格子生成

４．カラードプラ計測画像より断面積とドプラ速度分布を抽出

５．UMI流体構造連成解析

60

UMI流体構造連成解析の基礎式

ナビエ・ストークス式

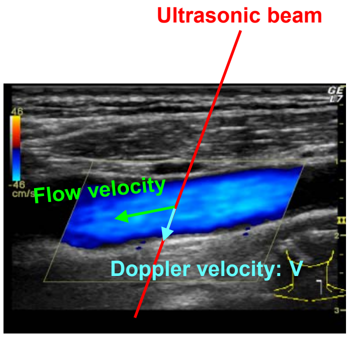
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} + \nu\Delta\mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f}$$

圧力方程式

$$\Delta p = -\nabla\cdot\left(\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}\right) + \nabla\cdot\mathbf{f}$$

フィードバック力

$$\mathbf{f} = -K\left(V - V^{*}\right)(\mathbf{e}_b\cdot\mathbf{e}_x)\mathbf{e}_x U / L$$



血管変形

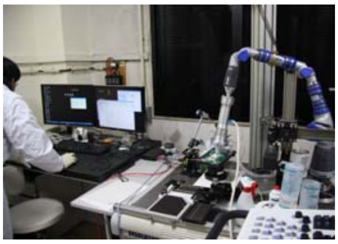
$$\frac{dy_w}{dt} + \frac{0.2E}{C_{vis}R_0}y_w = \frac{1}{C_{vis}}\left(P_w - P_{w0}\right)$$

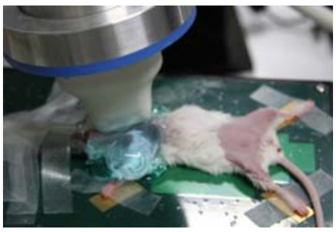
境界条件

上流端：一様平行流（大きさはドプラ速度誤差より不動点反復法）
下流端：自由流出（1点の圧力を断面積時間変化と最高・最低血圧より）

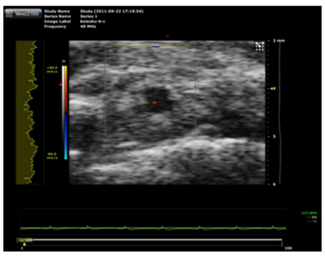
61

マウス頸動脈の解析





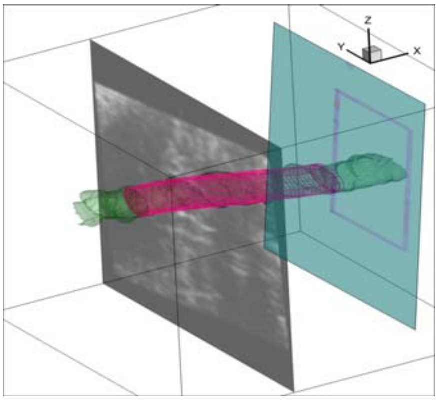
実験の様子



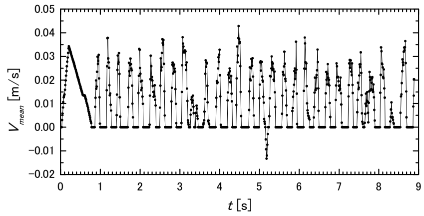
頸動脈カラードプラ計測結果

62

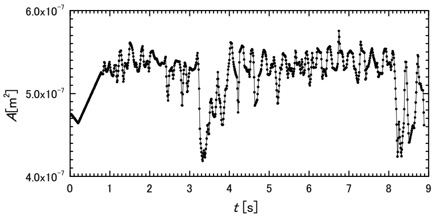
超音波計測結果



頸動脈血管形状抽出結果

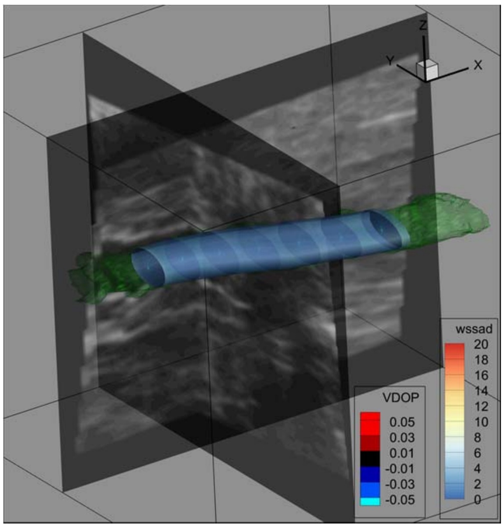


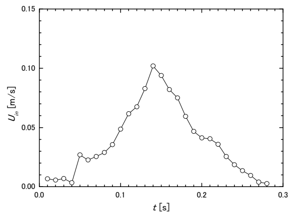
断面平均ドプラ速度



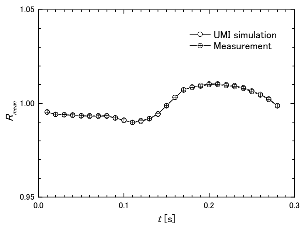
血管断面積

UMIシミュレーション結果





上流端断面平均流速

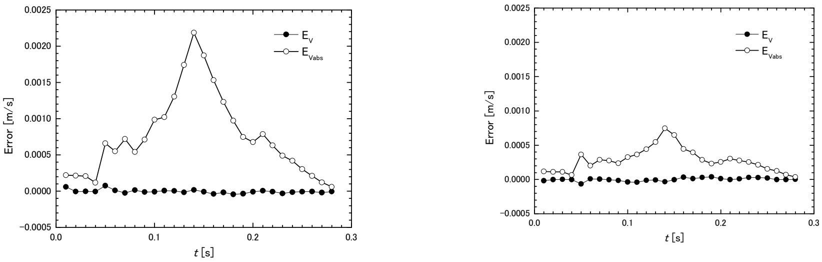


マウス頸動脈血流動態のリアライゼーション

平均無次元血管半径

通常のシミュレーションとUMIシミュレーションの比較

通常のシミュレーション　　　　**UMI シミュレーション**



ドプラ速度誤差の時間変化

速度ベクトル分布

65

結言

小動物用超音波計測連成血流解析システム

- **マウス頸動脈の解析**
- **通常のシミュレーションとの比較**
- **信頼性の保証された解析結果**

今後の課題

- **循環器系疾患の機序の解明**
- **臨床応用**

66

3.5 おわりに

将来展望

（1）医療分野への計測融合解析の応用

1. 循環器系疾患研究の新展開
   - マウス実験による循環器系疾患の原因解明と治療法開発

2. 医療画像診断装置の性能向上
   - 超音波診断装置に応用して高度診療を実現
   - MRI装置の計測精度を大幅に向上

（2）他分野への計測融合解析の応用

1. 原子カプラントの異常同定システム
2. 航空機の乱気流予測制御システム
3. 超小型スパコン開発による携帯型高度診断装置や建築物内気流制御

4. まとめ

1．はじめに
2．計測融合シミュレーションの理論的枠組み
　2.1 シミュレーションによる実現象の再現
　2.2 順問題と逆問題
　2.3 計測融合シミュレーションの定式化
3．計測融合シミュレーションによる血流解析
　3.1　はじめに
　3.2　超音波計測融合シミュレーション
　3.3　MR計測融合シミュレーション
　3.4　解析結果のデモ
　3.5　おわりに
4. まとめ