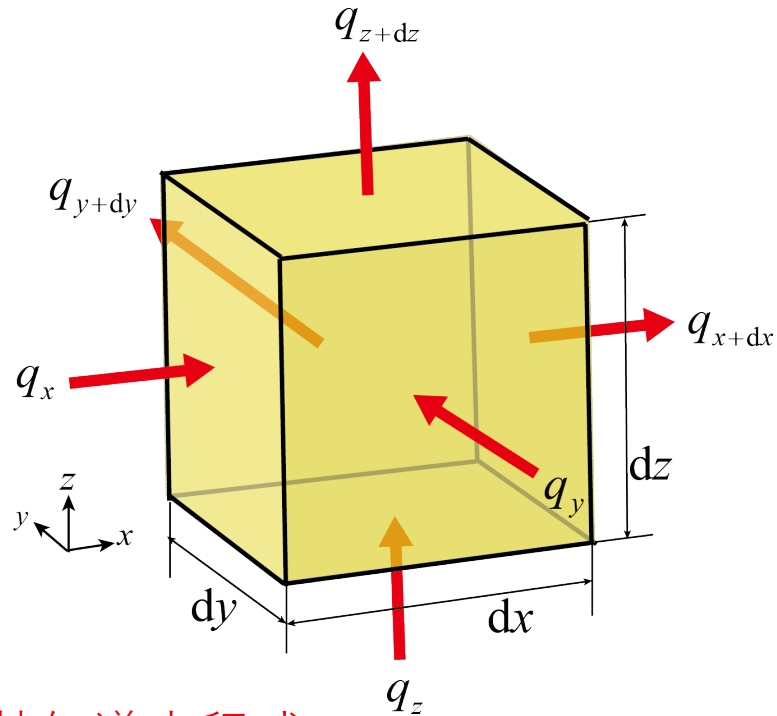
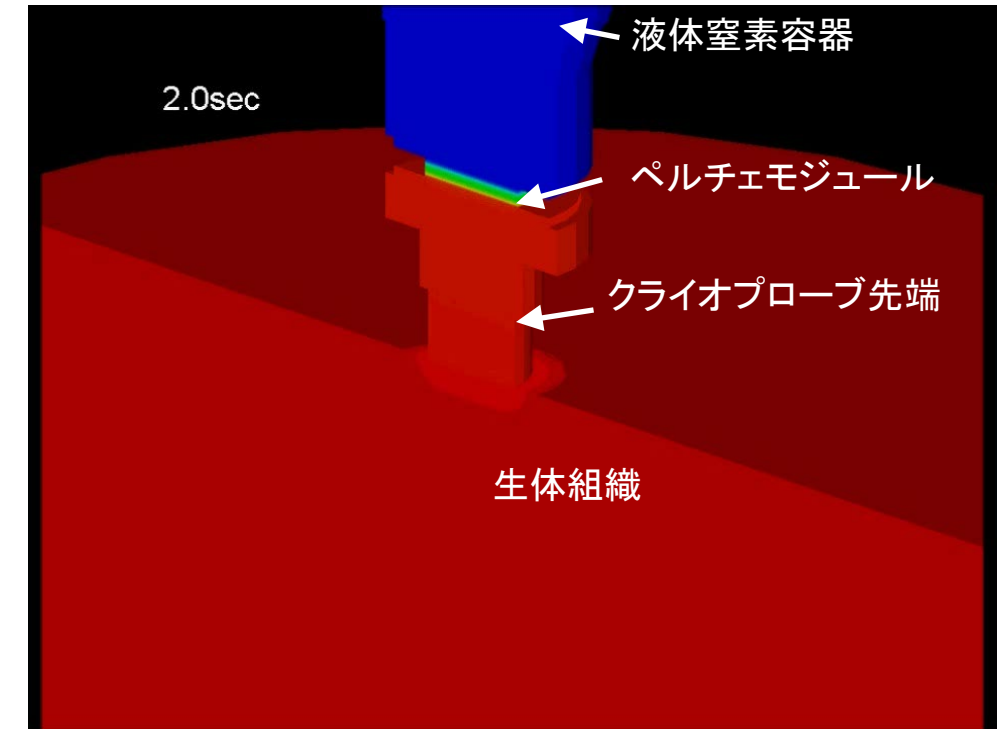




第2章 熱伝導（伝導伝熱）④

2-4. 熱伝導方程式と境界条件

クライオプロープの熱伝導数値シミュレーション



熱伝導方程式

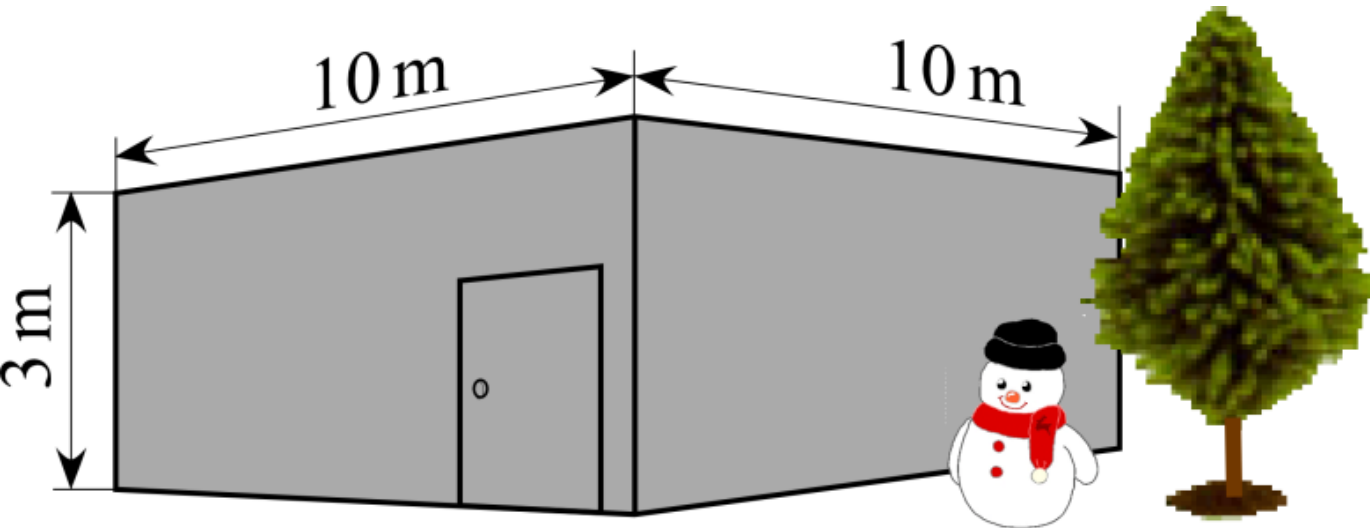
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_v$$



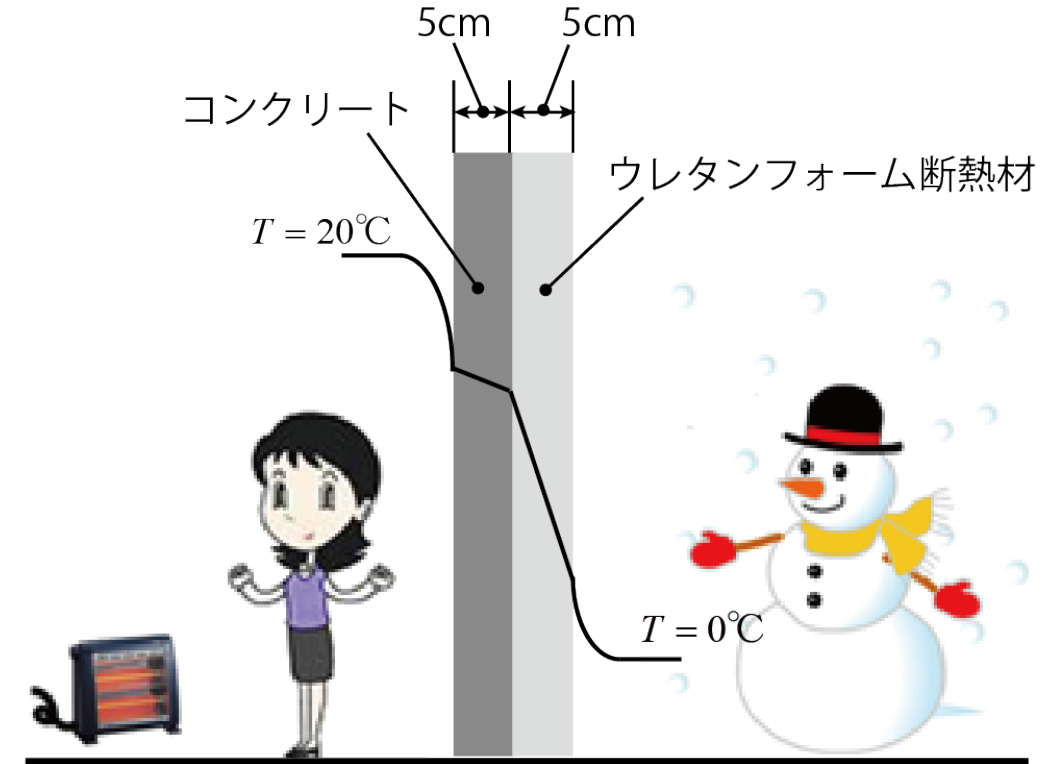
第2章 熱伝導（伝導伝熱）③

前回の内容

定常熱伝導の例題と演習問題



家の断熱と暖房費



壁の熱伝導



第2章 熱伝導（伝導伝熱）④

2-1. 定常熱伝導と物質の熱伝導率

2-2. 多層媒体の定常熱伝導

2-3. 定常熱伝導の例題と演習問題

2-4. 熱伝導方程式と境界条件

2-5. 非定常熱伝導

2-6. 非定常熱伝導の例題と演習問題

2-7. ニュートンの冷却法則



右図において、物体内の任意の位置における $dx \times dy \times dz$ の微小検査体積内へ流入・流出する熱流束を q とすると、微小体積の熱量保存則は次式で表される。 $\dot{q}_v$ は単位体積当たりの発熱量である。

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz = (q_x - q_{x+dx}) dy dz + (q_y - q_{y+dy}) dx dz + (q_z - q_{z+dz}) dx dy + \dot{q}_v dx dy dz \quad (1)$$

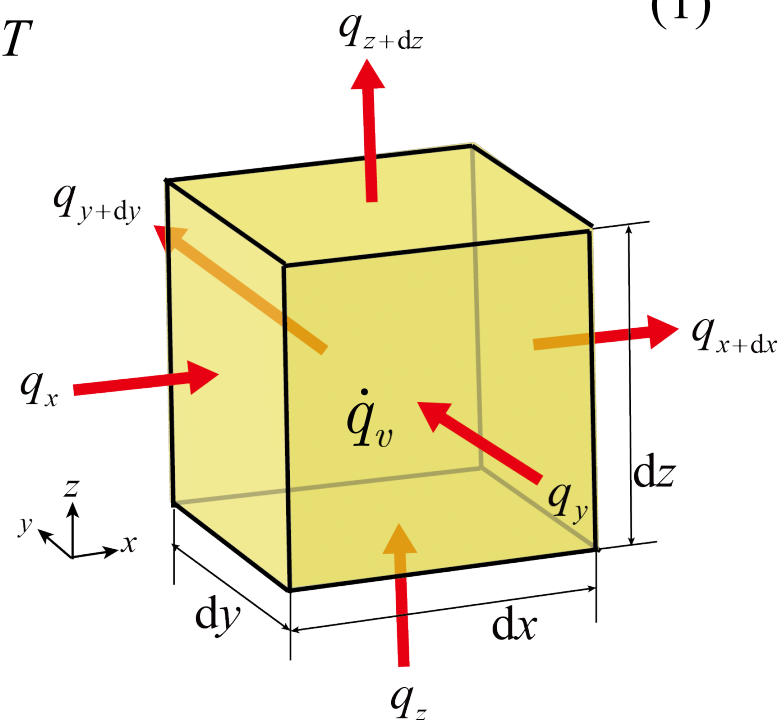
ここで、 ρ , c は物体の密度と比熱であり、 T は温度、 t は時間である。 T が場所と時間の関数であると考え、 $\partial T / \partial t$ は温度の時間偏微分を表す。

フーリエの法則 $q = -k \partial T / \partial x$ を適用すると、式(1)の右辺第1項は次式となる。

$$q_x - q_{x+dx} = -k \frac{\partial T}{\partial x} + \left[k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入して、**熱伝導方程式**が次式で表される。

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_v \quad (3)$$



直交座標系の微小体積におけるエネルギー収支



熱伝導方程式

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_v \quad (3)$$

熱伝導方程式(3)は、時間に関して1階、空間座標に関しては2階の偏微分方程式となっている。

この熱伝導方程式を解くには、**初期条件**(initial condition)と、空間における**境界条件**(boundary condition)が必要になる。

初期条件は、時間 $t=0$ における、空間の温度分布として与える。

熱伝導方程式は、初期条件と境界条件が与えられると、解くことができる。



熱伝導方程式の初期条件と境界条件 2

境界条件は以下の3種類に分類される。

- (1) 第1種境界条件 (Dirichlet condition)
境界の表面温度が規定される場合

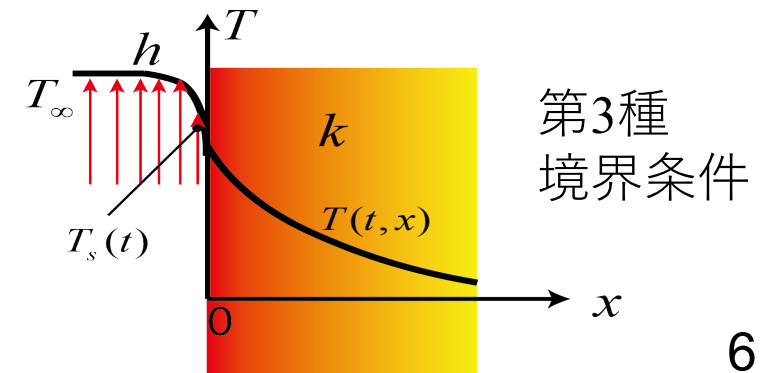
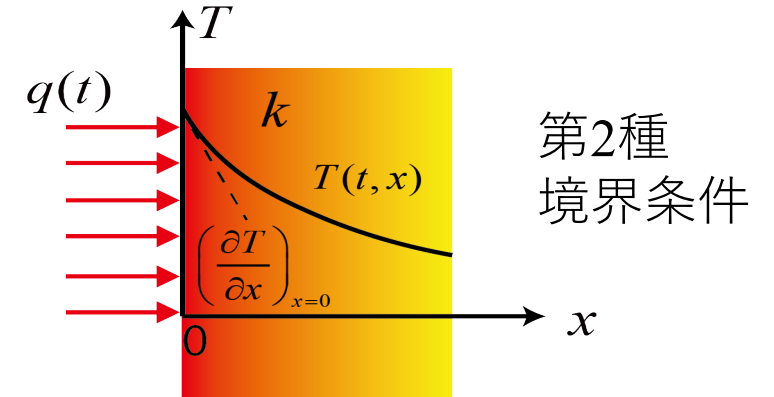
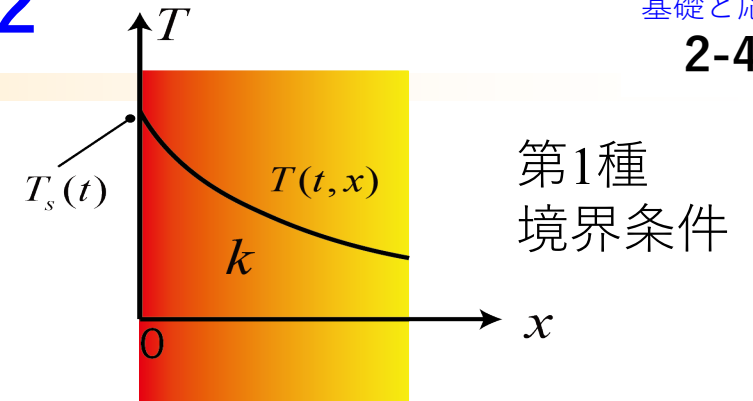
$$T_{x=0} = T_s(t) \quad (4)$$

- (2) 第2種境界条件 (Neumann condition)
境界の表面温度が規定される場合

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = q_s(t) \quad (5) \quad \text{断熱条件} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad (6)$$

- (3) 第3種境界条件
境界の対流熱伝達率が規定される場合

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = h(T_\infty - T_s(t)) \quad (7)$$



物体形状と熱物性値、初期条件、境界条件を与えて、熱伝導方程式を解くことによって、各種の伝熱シミュレーションが可能である。

モルモット背中皮膚の凍結実験

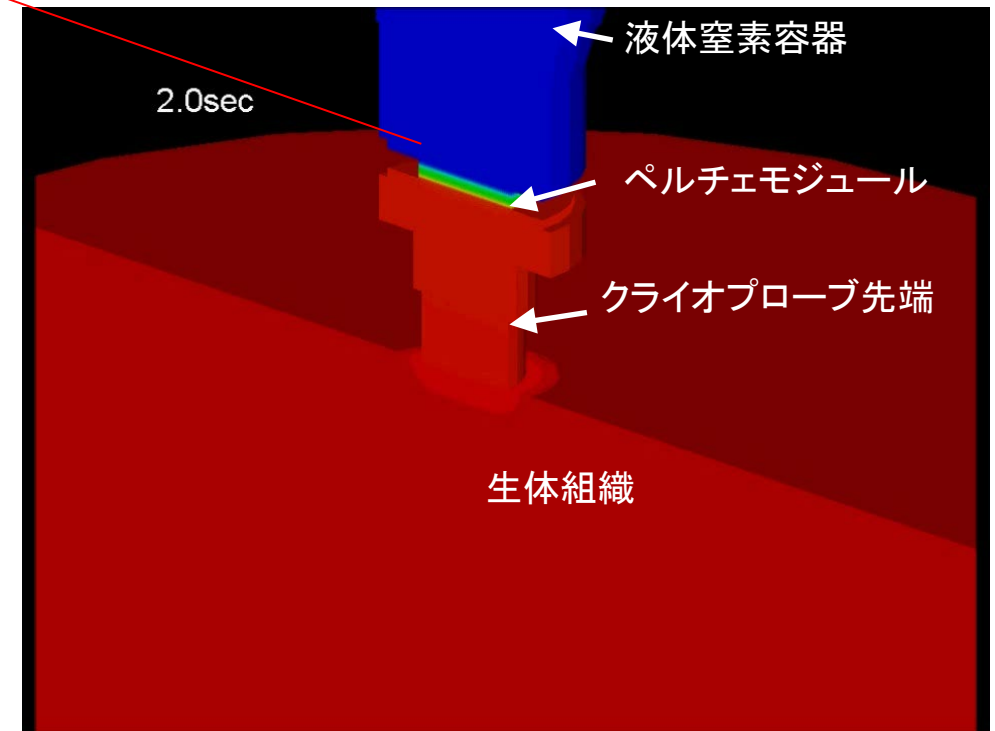
ペルチェプロープ

クライオプロープの熱伝導数値シミュレーション



モルモットによる実験の様子

円山 他、低温医学 (2008)



講師らのグループは、ペルチェ素子を温度制御デバイスとして使用し、皮膚の冷凍深さを $100\mu\text{m}$ 単位で制御することのできるクライオプロープの開発に成功した。その熱伝導シミュレーションには熱伝導方程式を使用している。



熱伝導方程式の無次元数 1

熱伝導方程式

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_v \quad (3)$$

ここで、 ρ (kg/m³): 密度、 c (J/(kg・K)): 比熱、 k (W/(m・K)): 熱伝導率、 $\dot{q}_v$ (W/m³): 単位体積当たりの発熱量
 k が一定の場合

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}_v}{\rho c} \quad (8) \quad \alpha = \frac{k}{\rho c} \text{ (m/s}^2\text{)} : \text{熱拡散率}$$

L を基準長さとし、 T_i を初期温度、 T_0 を基準温度として、式(9)の無次元化を行い、式(8)に代入すると

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_i - T_0}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad Z = \frac{z}{L} \quad (9)$$

熱伝導方程式(3)は

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} + \dot{G} \quad (10)$$

ここで式(4)の無次元数(Fourier number)は

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} \quad (11) \quad \dot{G} = \frac{\dot{q}_v L^2}{k(T_i - T_0)} \quad (12)$$

Fo をフーリエ数(Fourier number)
といい、時間の無次元数である。



熱伝導方程式の無次元数 2

境界条件は、表面の熱伝達率を h として

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = h \{ T_{\infty} - T_s(t) \} \quad (13)$$

$T_0 = T_{\infty}$ として無次元化すると

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_s = Bi \theta_s \quad (14)$$

ここで、無次元温度

$$\theta_s = \frac{T_s - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \quad (15)$$

ここで、無次元熱伝達率(Biot number)

$$Bi = \frac{hL}{k} \quad (16)$$

Bi はビオ数(Biot number)という k は固体の熱伝導率であることに注意する。

対流伝熱の無次元数ヌセルト数も同じ形式だが、ヌセルト数の熱伝導率は流体の値である。

フーリエ数 Fo とビオ数 Bi は、非定常熱伝導で重要なパラメータである。



次回予告

第2章 熱伝導（伝導伝熱）⑤

2-1. 定常熱伝導と物質の熱伝導率

2-2. 多層媒体の定常熱伝導

2-3. 定常熱伝導の例題と演習問題

2-4. 熱伝導方程式と境界条件

2-5. 非定常熱伝導

2-6. 非定常熱伝導の例題と演習問題

2-7. ニュートンの冷却法則

技術者と研究者に向けた伝熱工学の基礎と応用



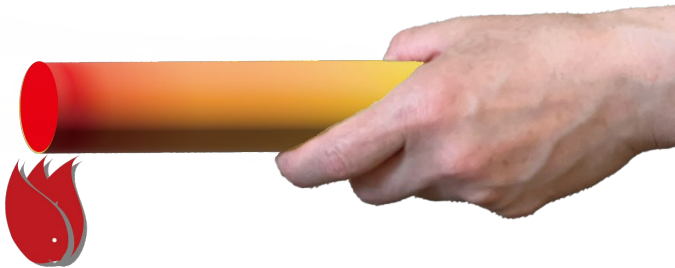
「もっと見る」欄に記載の今回の[要約](#)とホームページの[pdf資料](#)で理解を深めることができる。



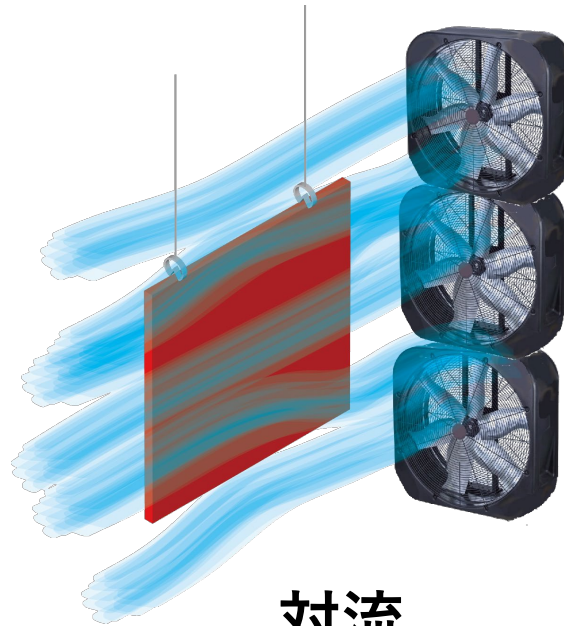
東北大学未来科学技術共同研究センター レクチャーシリーズ

— 熱プロセスを習得したい人のための入門と実践的応用 —

伝熱現象



熱伝導



対流



熱ふく射

講師 圓山重直

東北大学未来科学技術センター シニアリサーチ・フェロー
東北大学名誉教授・八戸高専名誉教授