



第2章 熱伝導（伝導伝熱）⑤

2-5. 非定常熱伝導

熱伝導方程式
$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}$$

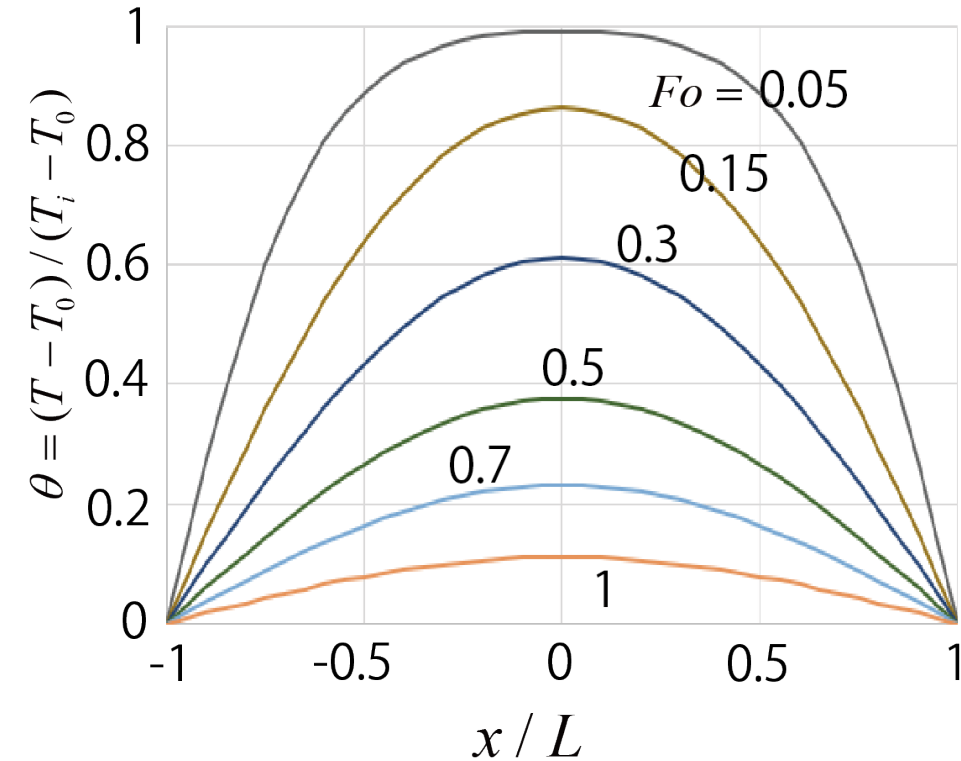
$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$$

無次元数 Fo は、**フーリエ数**

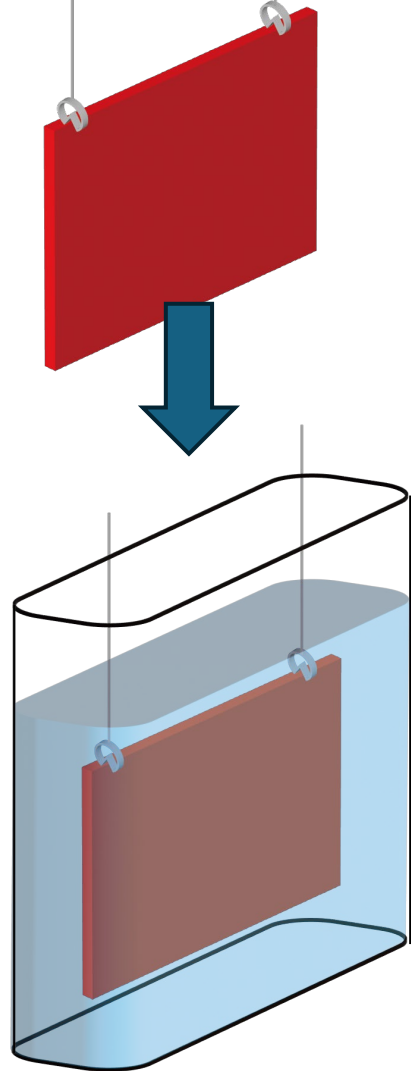
$$\theta_s = \frac{T_s - T_\infty}{T_i - T_\infty}, \quad Bi = \frac{hL}{k}$$

無次元数 Bi は、**ビオ数**

無次元数であるフーリエ数とビオ数によって非定常熱伝導の様相が記述される。



非定常温度分布の無次元表示



均一に加熱された板を流体に入れて冷却する場合

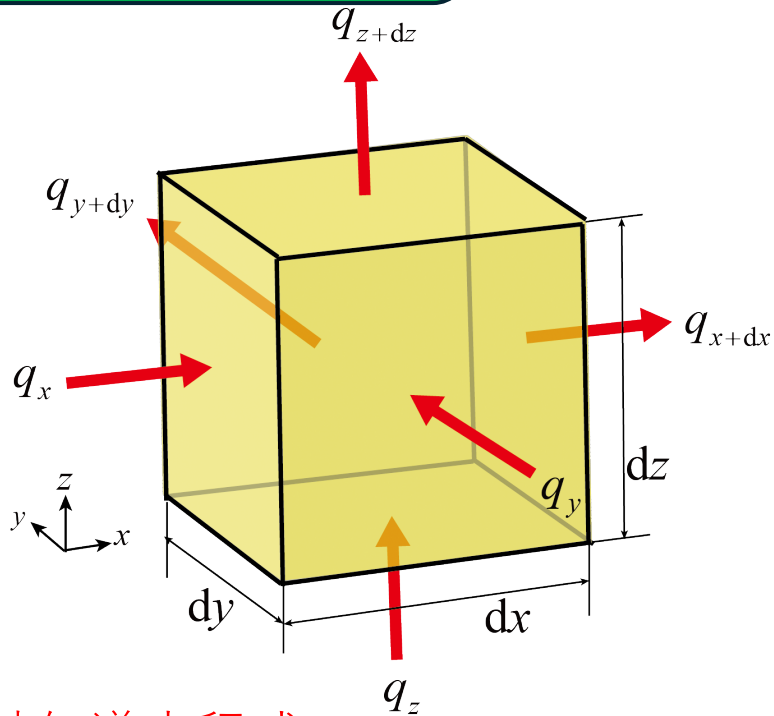


前回の内容

第2章 熱伝導（伝導伝熱）④

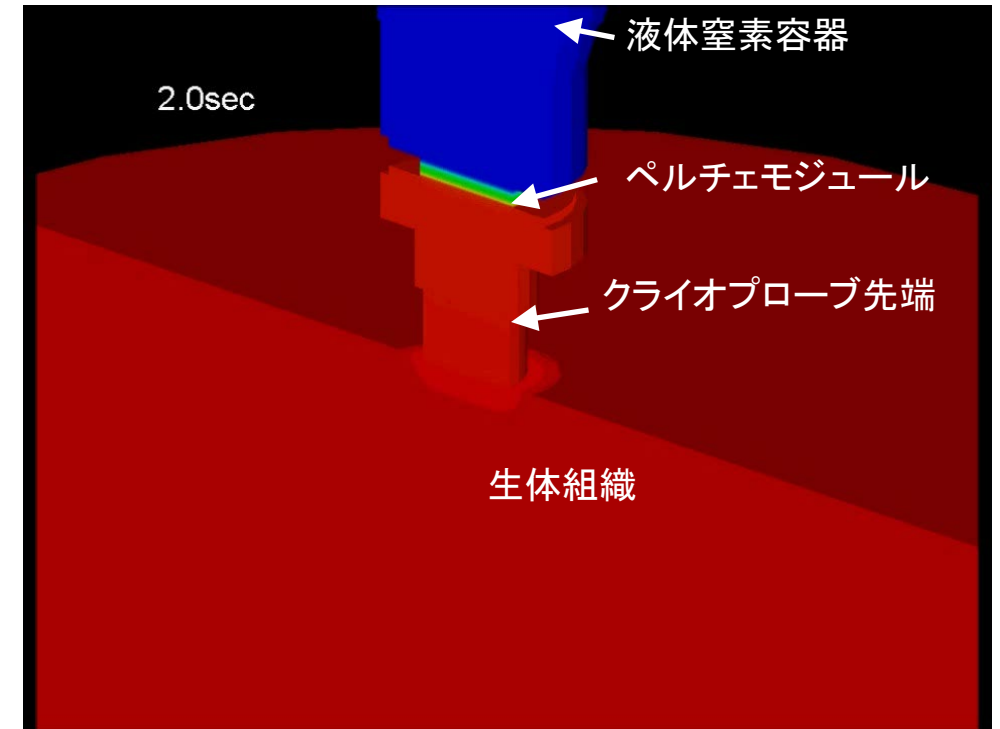
2-4. 熱伝導方程式と境界条件

クライオプロープの熱伝導数値シミュレーション



熱伝導方程式

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_v$$





第2章 熱伝導（伝導伝熱）⑤

2-1. 定常熱伝導と物質の熱伝導率

2-2. 多層媒体の定常熱伝導

2-3. 定常熱伝導の例題と演習問題

2-4. 熱伝導方程式と境界条件

2-5. 非定常熱伝導

2-6. 非定常熱伝導の例題と演習問題

2-7. ニュートンの冷却法則



加熱された板の冷却 1

温度150℃で均一に加熱された板を100℃のお湯に入れて急速冷却する場合を考える。
板の表面が沸騰するため、お湯に入れた直後にいた表面は100℃になると仮定する。

熱伝導方程式

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_v \quad (1)$$

ρ (kg/m³) : 密度、 c (J/(kg · K)) : 比熱、 k (W/(m · K)) : 熱伝導率、 $\dot{q}_v$ (W/m³) : 単位体積当たりの発熱量

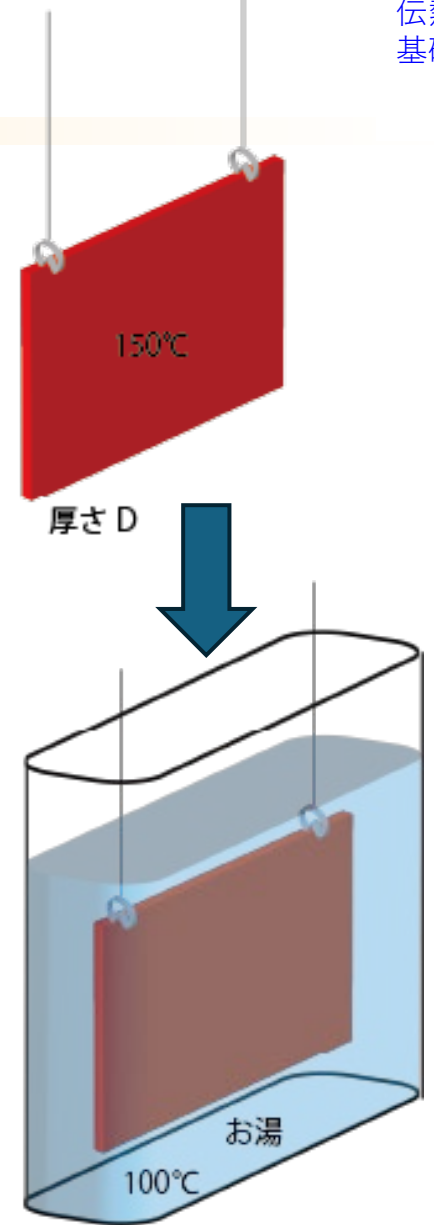
熱伝導率 k が一定で物体に発熱がない場合で、板の面積が厚さ D に比べて十分大きい場合、熱伝導方程式は、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2) \quad \alpha = \frac{k}{\rho c} : \text{熱拡散率} \quad (3)$$

冷却前は板が均一に加熱されているから、初期条件は、 $t < 0$ で、 $T_i = 150^\circ\text{C}$

冷却後は板両表面が100℃に保たれているので、境界条件は、
 $t > 0$, $x=0, x=D$ で $T(t, x)=100^\circ\text{C}$ (第1種境界条件)

1次元熱伝導方程式(2)を上記の初期条件と境界条件で解くことによって板内部の非定常温度分布が計算できる。



均一に加熱された板を水に入れて急速冷却する場合 4



加熱された板の冷却 2

前スライドの熱伝導方程式を下記の条件で解析する。

- (a) 板厚20mmの炭素鋼鉄板
- (b) 板厚20mmのガラス板
- (c) 板厚50mmの炭素鋼鉄板

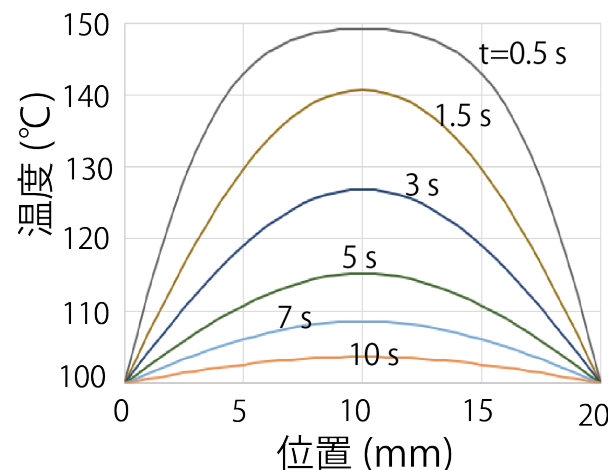
上記の条件で、冷却開始から最初の10秒間の温度分布を示す。

厚さ20mmの鉄板の場合、10秒で中心部まで冷却している。

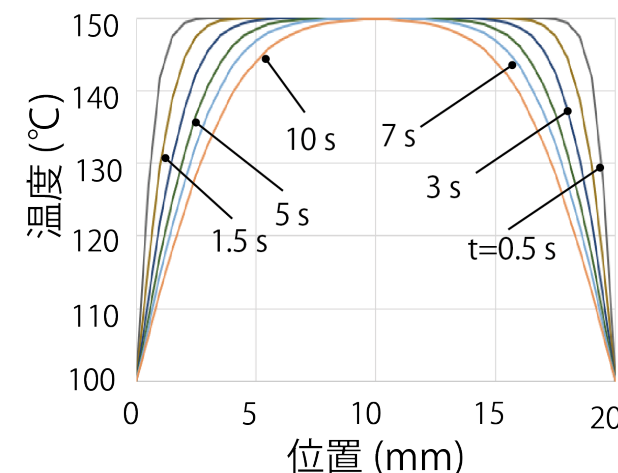
ガラス板の場合、10秒では中心部は初期温度のままである。

以前配信した伝熱工学の質問B（伝熱工学の基礎と応用 1-3）で卵を流水で急速冷却した場合に相当する。

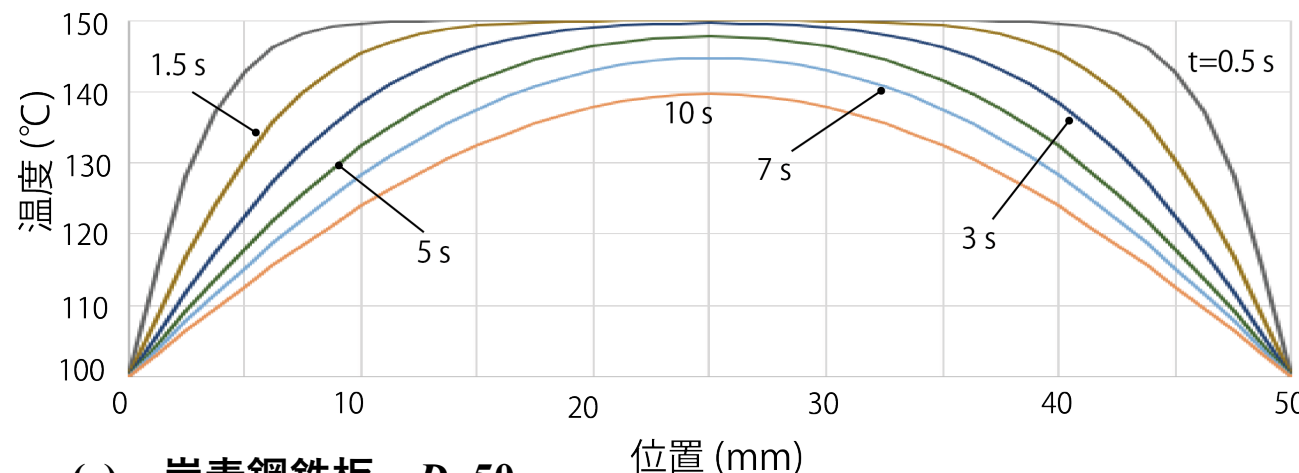
同じ鉄板でも厚さが変わると異なる温度分布になる。



(a) 炭素鋼鉄板 $D=20\text{mm}$



(b) ガラス板 $D=20\text{mm}$



(c) 炭素鋼鉄板 $D=50\text{mm}$

150°Cに加熱した板を表面を100°Cに冷却した場合の非定常温度分布



熱伝導方程式の無次元表示

$L=1/2D$ を基準長さ、 T_i を初期温度、流体温度を基準温度 T_0 として無次元表示すると

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_i - T_0}, \quad X = \frac{x}{L} \quad (4)$$

無次元熱伝導方程式
$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \quad (5)$$

無次元数 Fo は、**フーリエ数**といい

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} \quad (6)$$

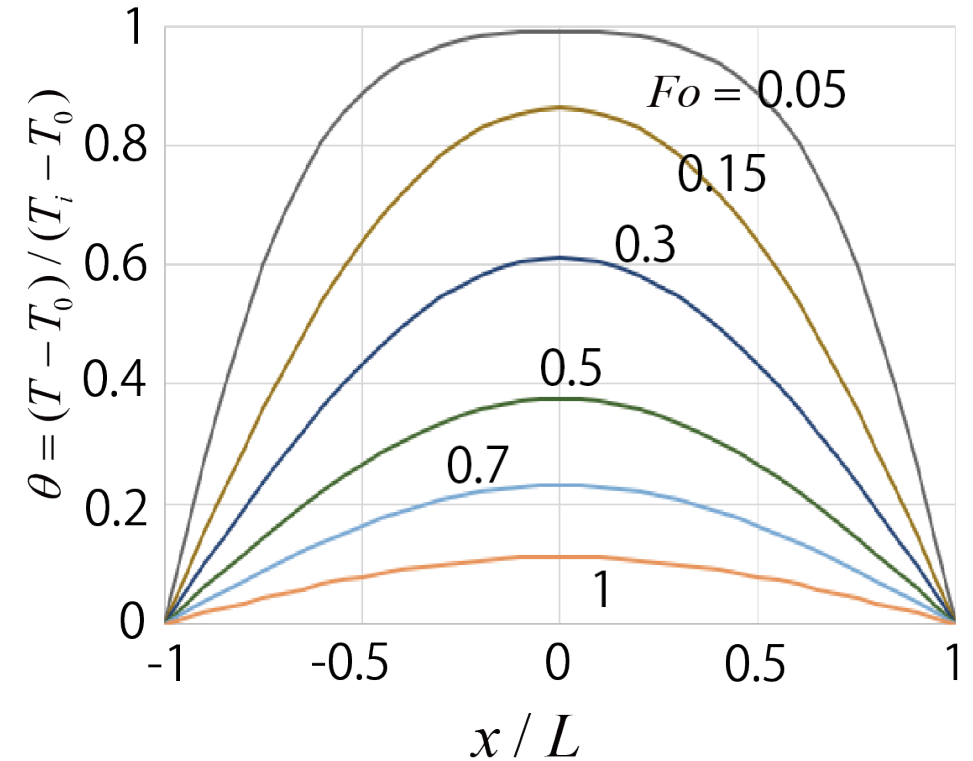
で定義される。

この無次元熱伝導解析結果を右図に示す。

この図に示すように、諸種の物質や板厚に関わらず、冷却（もしくは加熱）平板の**温度分布が統一的に標記できる**。

フーリエ数は時間を表す無次元数である。

フーリエ数の定義から、**フーリエ数は基準長さ L の2乗の逆数に比例する**。つまり、**長さが2倍になれば、その温度分布になるために4倍の時間が必要である**。



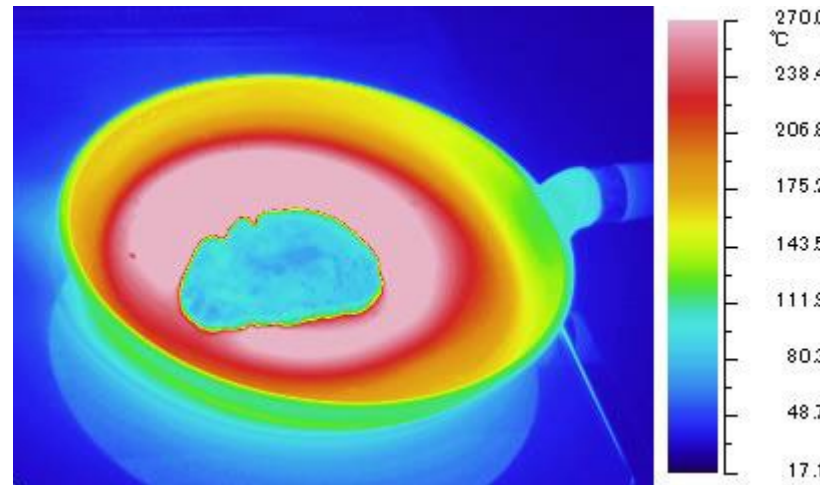
非定常温度分布の無次元表示



厚いステーキを焼くときには

招いた友人と気まずい思いをしないために

厚さが2倍の肉を焼くためには何倍の調理時間が必要だろうか



答え

肉の厚さが2倍になると
調理時間は4倍必要だ

铸铁のフライパンによるステーキの調理とサーモビューアーによる赤外線画像

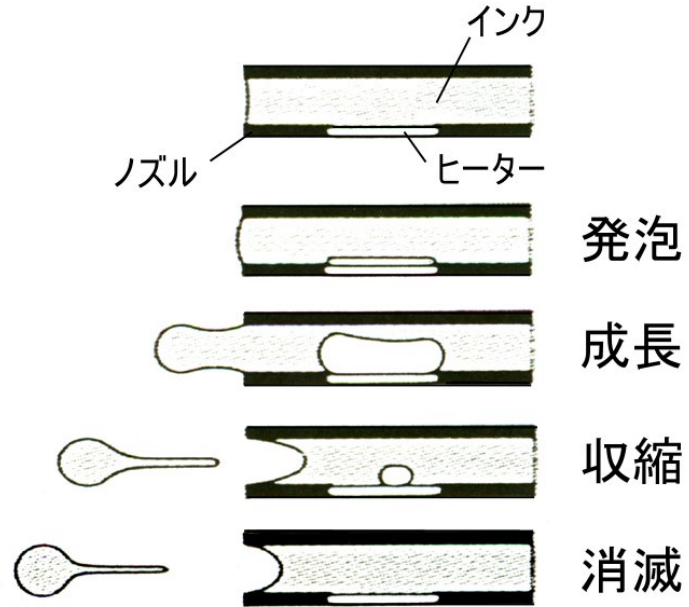
実験では厚さ4.5mmの肉（焼き上がりの厚さ）は50秒で調理できたが8mmの肉では160秒（3.2倍）の調理時間が必要だった。理論上の調理時間とほぼ一致した。



ミクロの熱伝導が最先端技術のコアとなる

前スライドの原理は微小物体にも適用できる。

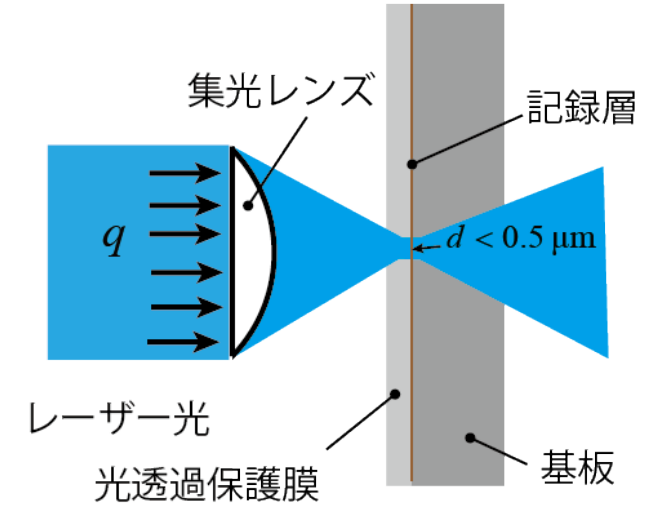
つまり、基本サイズが1/2になると反応時間は1/4、サイズが1/10になると反応時間は1/100になる。



バブルジェットタイプのインク
ジェットプリンターの作動原理

円山 機械の研究 (2000)

インクジェットプリンターは直径数ミクロンの多数のパイプにヒーターを取り付け瞬間的にインクを沸騰させてインクを発射している。



ブルーレイ光ディスクの情報書き込み原理

JSMEテキストシリーズ 演習伝熱工学
(2008)109頁参照

画像データを収録するブルーレイ光ディスクには膨大なデータが収納されている。その書き込みはレーザー光を $0.5\mu\text{m}$ 以下に集光し、その熱によって記録層に書き込んでいる。8



対流伝熱がある場合の板の冷却

温度 T_i で均一に加熱された厚さ D の板を温度 T_∞ の流体に入れて急速冷却する場合を考える。

境界条件は、表面の熱伝達率を h として

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = h \{ T_\infty - T_s(t) \} \quad (7)$$

$L=D/2$ を基本長さとし、 T_i を初期温度、 T_∞ を基準温度として、熱伝導方程式の無次元化を行う。

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}, \quad X = \frac{x}{L} \quad (8)$$

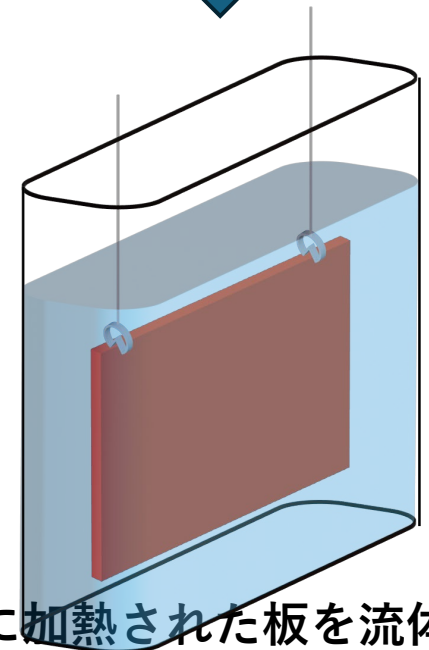
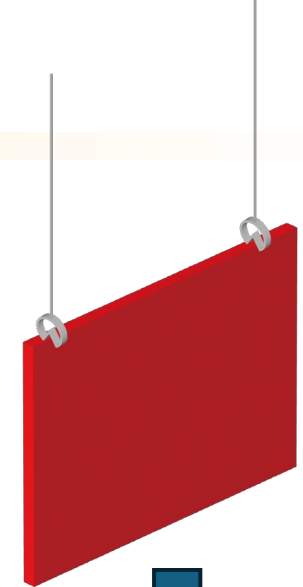
$$\text{熱伝導方程式は } \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \quad (9) \quad \text{Fo: フーリエ数}$$

式(7)の境界条件を無次元化すると

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_s = Bi \theta_s \quad (10) \quad \text{ここで、} \quad \theta_s = \frac{T_s - T_\infty}{T_i - T_\infty}, \quad Bi = \frac{hL}{k} \quad (11)$$

Bi はビオ数(Biot number)という。 k は固体の熱伝導率であることに注意する

対流伝熱がある第3種境界条件の非定常熱伝導は、フーリエ数とビオ数によって記述される。



均一に加熱された板を流体に入れて冷却する場合



ビオ数と非定常温度分布

加熱板の冷却では、過渡熱伝導はビオ数によって様相が異なる。

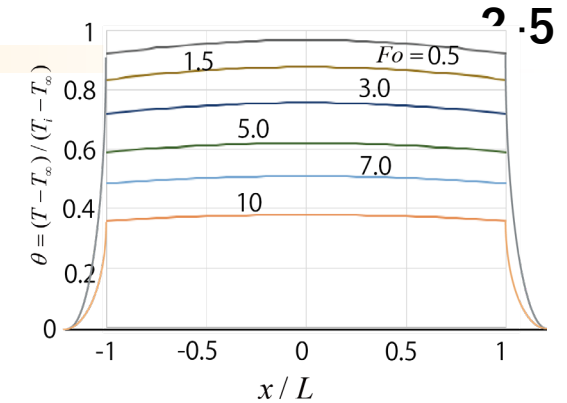
$Bi \ll 1$ では、物体の温度分布はほぼ一様となる。温度の時間変化は、物体の熱容量と表面からの伝熱量のみの関係となる。集中熱容量モデルはこの場合である。

$Bi \gg 1$ では、表面温度一定の第1種境界条件が近似的に適用できる。この場合、温度分布は位置とフーリエ数のみの関数となる。 $Bi = \infty$ では、第1種境界条件の非定常問題となる。

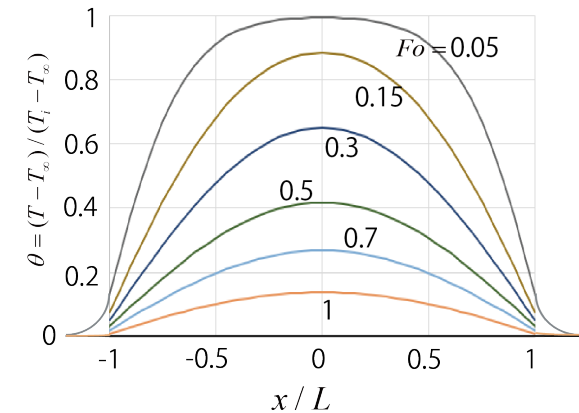
$Bi \approx 1$ では、上記の簡略化ができないため、非定常熱伝導方程式を直接解析して温度分布を求める必要がある。

ビオ数を検討することによって、物体内部の非定常温度分布が推定できる。右図では、ビオ数によってフーリエ数の範囲が異なっていることに注意する。

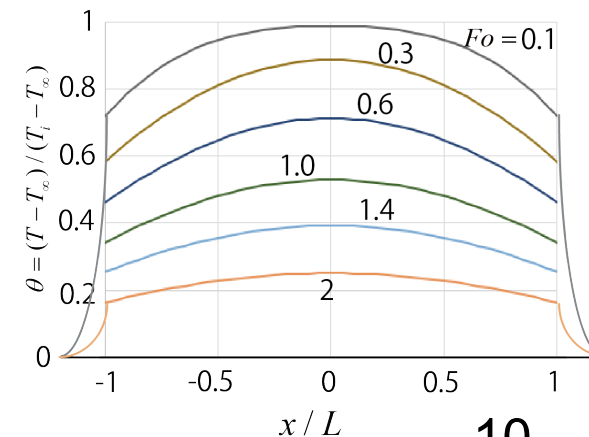
(a) $Bi = 0.1$ の場合の非定常温度分布



(b) $Bi = 20$ の場合の非定常温度分布



(c) $Bi = 1$ の場合の非定常温度分布





集中熱容量モデル

$Bi \ll 1$ では、物体内の温度分布を無視して熱容量だけを集中系として取り扱うことができる。このモデルを**集中熱容量モデル**(lumped capacitance model)という。

右上図に示すように、均一に加熱された物体が流体により冷却される場合を考える。

$Bi \ll 1$ では、物体内部の温度は場所によらず一様温度 T となる。物体における熱量の収支は次式で表される。

$$c\rho V \frac{dT}{dt} = -hS(T - T_\infty) \quad (12)$$

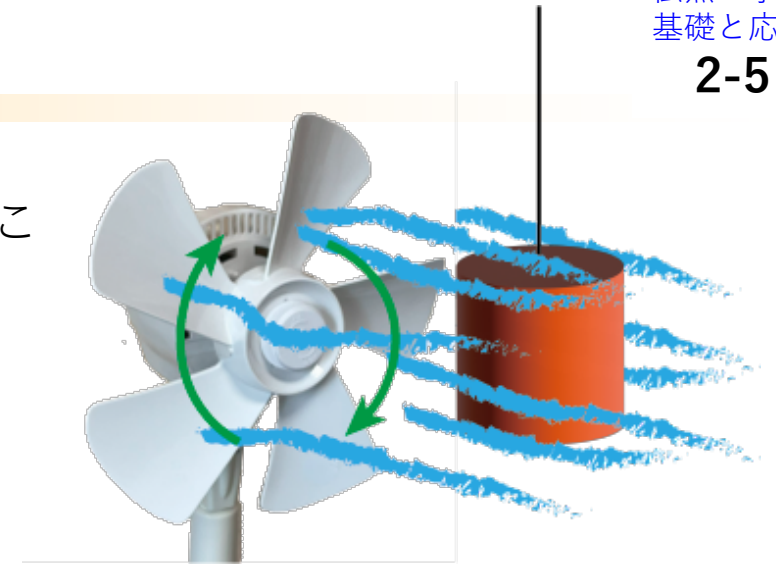
初期条件を用いて積分定数を決めると、次の解が得られる。

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left(-\frac{hS}{c\rho V}t\right) = \exp(-Fo Bi) \quad (13)$$

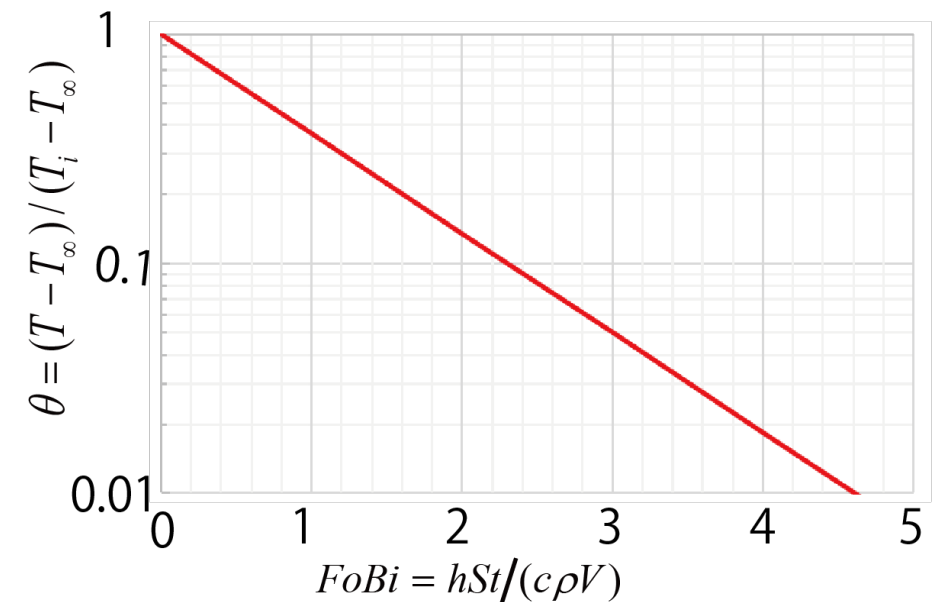
ここで Fo と Bi の**特性長さ L** は

$$L = \frac{V}{S} = \frac{\text{物体の体積}}{\text{物体の表面積}} \quad (14)$$

$Bi \ll 1$ で**集中熱容量モデル**が適用できる場合、物体温度は、右下図に示すように、片対数グラフで直線として表される。



加熱物体が流体中で冷却される場合



集中熱容量系の過渡温度変化



次回予告

第2章 熱伝導（伝導伝熱）⑥

- 2-1. 定常熱伝導と物質の熱伝導率
- 2-2. 多層媒体の定常熱伝導
- 2-3. 定常熱伝導の例題と演習問題
- 2-4. 熱伝導方程式と境界条件
- 2-5. 非定常熱伝導
- 2-6. 非定常熱伝導の例題と演習問題**
- 2-7. ニュートンの冷却法則

教科書

日本機械学会 JSMEテキストシリーズ 演習 伝熱工学 丸善



技術者と研究者に向けた伝熱工学の基礎と応用

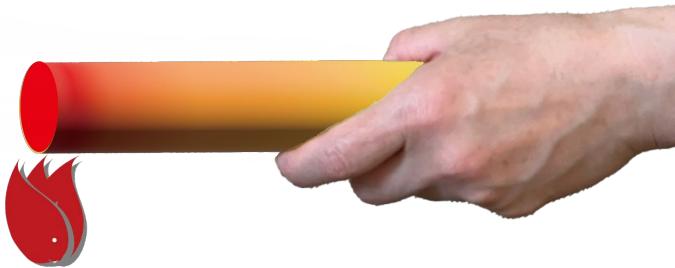
「もっと見る」欄に記載の今回の[要約](#)とホームページの[pdf資料](#)で理解を深めることができる。



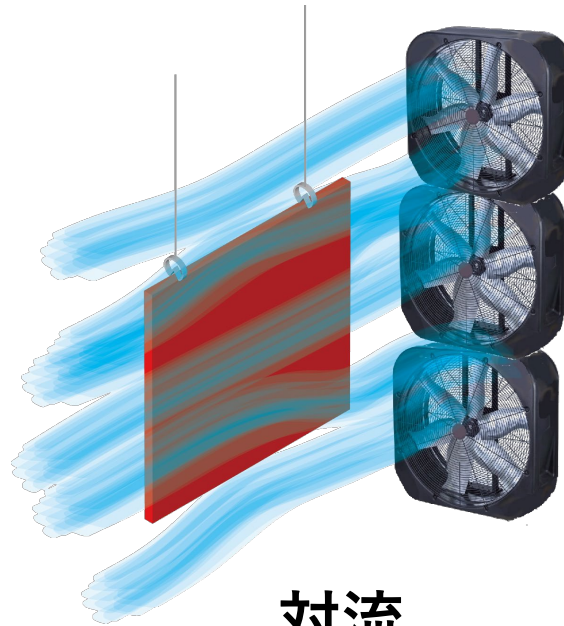
東北大学未来科学技術共同研究センター レクチャーシリーズ

— 熱プロセスを習得したい人のための入門と実践的応用 —

伝熱現象



熱伝導



対流



熱ふく射

講師 圓山重直

東北大学未来科学技術センター シニアリサーチ・フェロー
東北大学名誉教授・八戸高専名誉教授